

El Atractor de Lorenz Geométrico

Roger Javier Metzger Alván
IMPA - Rio de Janeiro

Introducción.-

Nuestro objeto de interés será la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy \end{aligned}$$

donde σ, r, b son números positivos.

Esta ecuación surge como un truncamiento de la ecuación de Navier Stokes en el problema de Benard.

Es la aproximación de una E.D.P. que describe la convección de un fluido calentado desde abajo. Las funciones incógnitas de la ecuación de Benard se desarrollan en series de Fourier y se obtiene un sistema de E.D.O., en este sistema se hace el truncamiento haciendo todos los coeficientes iguales a cero excepto tres.

Una pregunta puede ser la relación existente entre la ecuación de Lorenz y el problema de Benard. Las cosas podrían no ser tan malas como se piensan pero de todos modos solo nos preocuparemos por estudiar las E.D.O. en si, para investigar sus complicaciones y soluciones. Los fenómenos ocurren para un rango de parámetros (σ, r, b) bastante amplio. Lorenz estudió esta ecuación para los valores $\sigma = 10; b = \frac{8}{3}; r = 28$. Donde al parecer existe un 'atractor robusto'.

Primera aproximación.-

Estudieemos algunas características del sistema.

El flujo definido por la ecuación contrae área puesto que,

$$\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = -(\sigma + b + 1)$$

que es igual a $-(13 + \frac{2}{3})$ para los parámetros de Lorenz.

*El sistema es invariante por $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$.

*Existe un punto fijo (o punto de reposo) en el origen. Para $r < 1$ este es el único y es atractor pues los 3 autovalores del desarrollo lineal en cero son negativos.

Esto se ve de la ecuación característica para los autovalores de la matriz que representa la parte lineal.

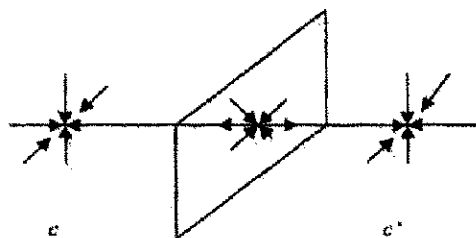
$$\begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

siendo

$$- [\lambda^3 + (\sigma + 1 + b)\lambda^2 + (\sigma(1 - r) + b(\sigma + 1))\lambda + b\sigma(1 - r)]$$

la ecuación característica.

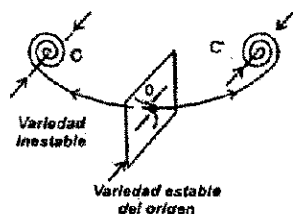
*Para $r > 1$, el origen no es más un atractor y surgen otros dos puntos de reposo c y c' . Se demuestra que c y c' son atractores para r cerca de 1, esto se demuestra fácilmente haciendo el desarrollo lineal del campo en c y c' .



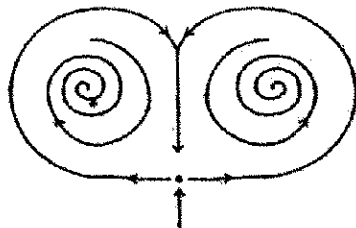
$$c = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

$$c' = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

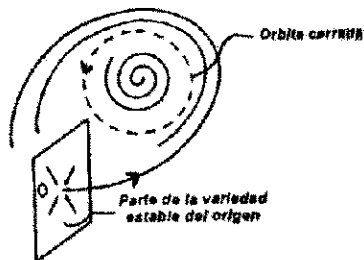
Si hacemos r crecer más, c y c' desarrollan 2 autovalores complejos conjugados por lo que en una subvariedad de dimensión 2 las soluciones se enrollan en espiral hacia ellos.



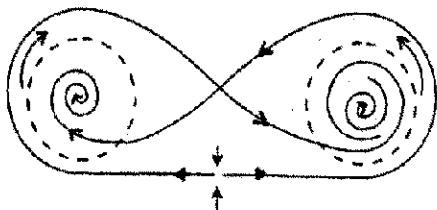
Cuando r crece más aún las espirales se hacen cada vez más anchas, de modo que cuando $r \approx 13,926$ (experimentos numéricos) las espirales son tan grandes que tocan la variedad estable del origen, convirtiéndose así en un punto homoclinico.



Para r superiores a ese valor crítico las dos órbitas (o ciclos) con periodos infinito comenzando y terminando en el origen atraviesan la variedad estable del origen y se forman órbitas periódicas cerradas cerca de los atractores c y c' . Esta última bifurcación se conoce que es del tipo Hopf.



Si continuamos aumentando r , cada rama de la variedad inestable del origen es eventualmente atraída al punto fijo opuesto.



Algunas Definiciones.-

Sea M una variedad, llamaremos $V'(M)$ al espacio de Banach de los campos de vectores C^r , con la norma usual C^r .

Si $X \in V'(M)$, definimos $X':M \rightarrow M$ como el flujo de difeomorfismos generados por X .

Definición.- (Atractor) $\Lambda \subset M$ es un atractor de $X \in V'(M)$ si:

- Λ es compacto.
- Λ es invariante por el flujo de X .
- Λ es transitivo (i.e. contiene por lo menos una órbita que es densa en Λ)
- Λ tiene una vecindad compacta U tal que:

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} X^t(U)$$

U es llamado de olla de atracción ('basin of attraction').

Definición.- Un atractor Λ es llamado persistente (en la topología C^r) si la bola local de atracción de Λ es tal que :

$$\Lambda_Y = \bigcap_{r \geq 0} Y^r(U)$$

donde Λ_Y es un atractor para todo Y en una vecindad C^r de X .

Observación 1.- Atractores persistentes típicos son los atractores hiperbólicos.

Observación 2.- En $\dim=3$ un atractor C^r persistente sin singularidades tiene que ser hiperbólico.

Observación 3.- En $\dim > 3$ se conocen para cada dimensión ejemplos de atractores C^r persistentes no-hiperbólicos sin singularidades.

Guckenheimer mostró que existe un campo $X_0 \in C^r$, que tiene un atractor C^1 persistente con una singularidad con autovalores $0 < \lambda_1 < -\lambda_2 < -\lambda_3$ (con $\lambda_1 + \lambda_3 > 0$) y que tiene módulo de estabilidad 2, más específicamente.

Teorema.- Existe un conjunto abierto U en el espacio de los campos vectoriales en \mathbb{R}^3 y una aplicación continua $k : U \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ tal que:

- Cada $X \in U$ tiene un atractor (llamado de Lorenz) bidimensional.
- $X \in Y \subset U$ son topológicamente conjugados por un homeomorfismo cercano a la identidad si y solo si tienen la misma imagen por k .

El Atractor de Lorenz Geométrico.-

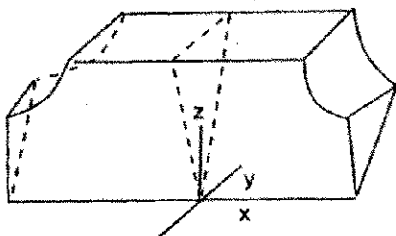
En una región pequeña del origen podemos considerar el sistema linearizado.

$$\dot{x} = \lambda_1 x$$

$$\dot{y} = \lambda_2 y$$

$$\dot{z} = \lambda_3 z$$

con las siguientes propiedades: $0 < \lambda_1 < -\lambda_2 < -\lambda_3$; y $\lambda_1 + \lambda_3 > 0$



En la figura, sea S el cuadrado de arriba ($z = 1, -1 \leq x, y \leq 1$)

Con condiciones iniciales $(x_0, y_0, 1)$ en el cuadrado S tenemos las soluciones dentro de la región linearizada.

$$x(t) = x_0 \exp(\lambda_1 t)$$

$$y(t) = y_0 \exp(\lambda_2 t)$$

$$z(t) = \exp(\lambda_3 t)$$

Ahora, tomamos el cuadrado de la derecha en $x=1$ de modo que la trayectoria cruza dicho plano cuando:

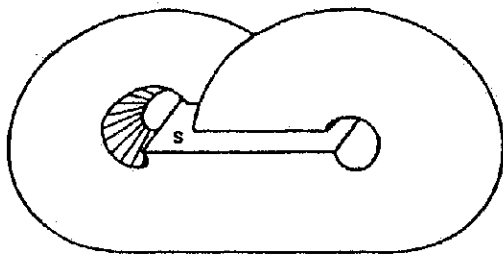
$$x=1$$

$$y = y_0 x_0^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = y_0 x_0^s$$

$$0 < s < 1 \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_3 > 0$$

$$z = x_0^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}} = x_0^s$$

Ahora seguimos el flujo de modo suave, no cero y no linealmente de modo a volver el triángulo en un subconjunto de S como se indica.



Por supuesto que al hacer esto se ha hecho una elección. Ciertamente esta elección puede ser hecha de modo que la aplicación de Poincaré (aplicación de primer retorno) que resulta tiene la forma.

$$F: S \longrightarrow S$$

$$F(x, y) = (f(x), g(x, y))$$

Donde f es una función del intervalo $[-1, 1]$. La forma de F dice que la posición a la que regresa una línea con $x=cte$. Sólo depende de x , es decir F lleva líneas con $x=cte$ en líneas $x=cte$ (se dice así que F preserva la foliación $x=cte$, que en este caso es la foliación estable).

Además de esto si por fuera la vecindad del cero donde el campo es linealizado, el campo es suave podemos asumir:

$$g(x_0, y_0) > \frac{1}{4} \quad \text{si } x_0 > 0$$

$$g(x_0, y_0) < -\frac{1}{4} \quad \text{si } x_0 < 0$$

Esto hace que los triángulos regresen separados.

Si encontramos el conjunto invariante de esta aplicación (por aplicaciones sucesivas) encontraremos un conjunto límite dentro de los triángulos principalmente porque la aplicación contra área.

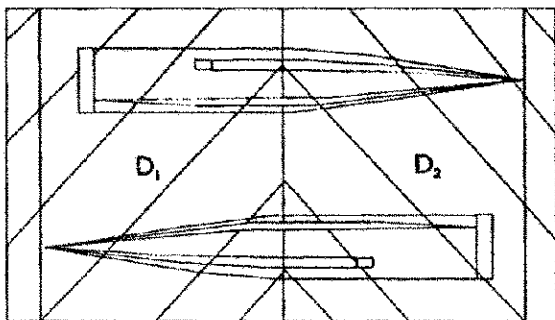


Fig. 3

Propiedades de f .- Sea $I = [-1, 1]$.

i) $f(0_+) = -1; f(0_-) = 1$

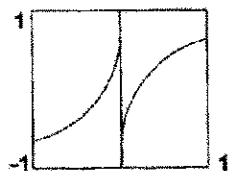
ii) $f'(x) > \sqrt{2} > 1$

iii) $-1 < f(x) < 1$

Estas condiciones dicen que f es localmente eventualmente sobre. Esto significa que para todo intervalo J contenido en el intervalo de definición I de f se cumple que existe un número entero $n > 0$ tal que $f^n(J) = I$

Otra característica es que $f'(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow 0$ (por la derecha o por la izquierda). Esto es debido a que $s < 1$.

Con estas propiedades podemos dar un bosquejo del grafo de f .



Ahora, W. Parry mostró que una f satisfaciendo estas propiedades es topológicamente conjugada a una y sólo a una aplicación $P = P_m$, dada por:

$$P(x) = \begin{cases} m(x-c)+1 & -1 \leq x < 0 \\ m(x-c) & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Con esto tenemos algunos elementos de la demostración del teorema de Gukenheimer, la conjugación de Parry, nos dará la aplicación k . El conjunto invariante en el intervalo representará el atractor en la aplicación de Poincaré puesto que la foliación por la que se hace la protección para dar f es estable. Este atractor en S se convierte en un atractor de $\dim=2$ cuando lo saturamos por el flujo. Que el conjunto límite es transitivo se debe a que las f lo son (pues son expansoras).

Bibliografía.-

John Gukenheimer, R.F. Williams, Structural Stability of Lorenz Attractors, in Pub. Math. I.H.E.S.' 50

Alvaro Rovella, The Dynamics of Perturbations of the Contracting Lorenz Atractor, Boletín S.B.M. vol 24, N° 2.

David Ruelle, The Lorenz Attractor and the Problem of Turbulence, Springer LNM 565

Jerry Marsden, Attempts to Relate the Navier-Stokes Equations to Turbulence, Springer LNM 615

R.F. Williams, The Structure of the Lorenz Attractor, Springer LNM 615.