PESQUIMAT
Revista del Instituto de
Investigación de la Facultad
de Ciencias Matemáticas de la UNMSM
Vol. I - Nº 1. pp 48-54 Lima - Perú Julio - 1998

[1]Soluciones Ultradébiles de una ecuación de Onda no Lineal, con coeficientes dependientes del tiempo

Eugenio Cabanillas Lapa
Instituto de Investigación
de la Facultad de Ciencias Matemáticas - UNMSM

Introducción

En este trabajo probaremos la existencia de soluciones ultradébiles del sistema

$$
(*)\quad \left|\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a(t)\Delta u + \lambda \dfrac{\partial}{\partial t}(u^3) = 0 & \text{en } Q \\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial \gamma} = g & \text{en } \Sigma \\[2ex]
u(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) & \text{en } \Omega
\end{array}\right.
$$

donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, bien regular, con frontera Γ; $T > 0$, $Q = \Omega \times]0,T[$, $\Sigma = \Gamma \times]0,T[$, $a(t) \geq a_0 > 0$, $\forall t \in [0,T]$, $a \in C^1([0,T])$, $g \in L^2(\Sigma)$, $\lambda > 0$.

Lions [2], resuelve el problema de hallar las soluciones ultradébiles de (*) con $a(t) = 1$, mediante un método directo, ya que no es posible en situaciones no lineales de este tipo, aplicar el método de transposición.

En diversos problemas de control óptimo el operador asociado al sistema (*) depende del tiempo, por lo que, a nuestro criterio, es de suma importancia el estudio del sistema (*)

Es de resaltar que el método estudiado es aplicable al sistema

---

[1] Este trabajo fué financiado por el Consejo Superior de Investigación en el año 1997

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A(t)u + \lambda \dfrac{\partial}{\partial t}\left(|u|^\rho u\right) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \gamma_A} = g \\ u(x,0) = 0 = \dfrac{\partial}{\partial t}(x,0) \end{cases}$$

Siendo $\dfrac{\partial u}{\partial \gamma_A}$ la derivada conormal asociada al operador $A(t)u = -\sum \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)$

1.- *Preliminares*

Con $(.,.)$, $(.,.)_\Gamma$ denotaremos los productos internos en $L^2(\Omega)$ y $L^2(\Gamma)$ respectivamente, $|\,.\,|$ indicará la norma en $L^2(\Omega)$ y $|\,.\,|_p$, la norma en $L^p(\Omega)$.

Teorema 1.1 (Del trazo). Sea Ω un abierto acotado, bien regular de $\mathbb{R}^n$, de frontera Γ. Entonces existe una única aplicación

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega), \text{ lineal y continua}$$

tal que $\gamma_0 \varphi = \varphi/_\Gamma$, $\forall \varphi \in D(\overline{\Omega})$. Además $Nu(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$

Dem. : Medeiros - Rivera [3].

2.- *El resultado Principal*

Teorema 2.1 Dada $g \in L^2(\Sigma)$, el sistema (*) admite una única solución ultradébil u tal que:

(2.1) $\qquad u \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \cap L^4(Q)$

(2.2) $\qquad \int_0^t u(s)ds \in L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega)\right)$

Demostración

Hagamos

(2.3) $$w(t) = \int_0^t u(s)ds$$

y consideremos el sistema

(2.4) $$\begin{cases} w'' - a(t)\Delta w + \int_0^t a'(s)\Delta w(s)ds = 0 & \text{en } Q \\ \dfrac{\partial w}{\partial \gamma} = g_1 = \int_0^t g(s)ds & \text{en } \Sigma \\ w(0) = 0 = w'(0) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

siendo g_1 ; $\dfrac{\partial g_1}{\partial t} \in L^2(\Sigma)$, $g_1(0) = 0$

Resolveremos (2.4) usando el método de Galerkin.

Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_m, \ldots\}$ base de $H^1(\Omega)$ y consideremos

$V_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$ el subespacio generado por $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$.

Buscamos w_m de la forma:

$$w_m(t) = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t) v_j$$

donde los h_{jm} están determinados por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

(2.5) $$(w_m'', v_j) + a(t)\left(\nabla w_m, \nabla v_j\right) + (M(t), v_j) + \lambda\left((m')^3, v_j\right) = a(t)(g_{1m}, v_j)_\Gamma$$

$$g_{1m} \longrightarrow g_1 \quad \text{en } L^2(\Sigma)$$

(2.6) $$w_m(0) = 0 = w_m'(0) = 0_t.$$

donde

(2.7) $$M(t) = \int_0^t a'(s)\Delta w_m(s)ds$$

Por el teorema de Caratheodory existe una solución de (2.5)-(2.7) en el intervalo $[0, T_m[$. Las estimativas a priori permitirán extender la solución al intervalo $[0, T]$ independiente de m.

Estimativa a Priori:

Multiplicando la ecuación (2.5) por $h'_{jm}(t)$ y sumando de $j=1$ a $j=m$, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left\{|w'_m(t)|^2 + a(t)|\nabla w_m(t)|^2\right\} + 2\lambda|w'_m|_4^4$$
$$= -2\left(M(t), w'_m\right) + a'(t)|\nabla w_m|^2 + 2a(t)\left(g_1, w'_m\right)_\Gamma$$

Integrando de 0 a t y usando (2.7):

$$(2.8)\quad |w'_m(t)|^2 + a(t)|\nabla w_m(t)|^2 + 2\lambda\int_0^t |w'_m(s)|_4^4\,ds$$
$$= -2\int_0^t \left(M(s), w'_m(s)\right)ds + \int_0^t a'(s)|\nabla w_m(s)|^2\,ds + 2\int_0^t a(s)\left(g_{1m}(s), w'_m(s)\right)_\Gamma ds$$
$$= -2\underbrace{\left(M(t), w_m(t)\right)}_{I_1} + \underbrace{2\int_0^t \left(M'(s), w_m(s)\right)ds}_{I_2} + \int_0^t a'(s)|\nabla w_m(s)|^2\,ds +$$
$$+\underbrace{2\int_0^t a(s)\left(g_{1m}(s), w'_m(s)\right)_\Gamma ds}_{I_3}$$

Acotemos los términos I_i

Acotación de I_1:

$$|I_1| = \left|\left(\int_0^t a'(s)\Delta w_m(s)ds, w_m(t)\right)\right| \le$$
$$\le \left(\int_0^t |a'(s)||\nabla w_m(s)|ds\right)|\nabla w_m(t)| + \left(\int_0^t |a'(s)|\left|\frac{\partial w_m}{\partial\gamma}(s)\right|_\Gamma ds\right)|w_m(t)|_\Gamma$$
$$\le c_0\left(\int_0^t |\nabla w_m(s)|ds\right)|\nabla w_m(t)| + c_1\left(|g_1|_{L^2(\Sigma)}|w_m(t)|_\Gamma\right)$$

Aplicando el teorema 1.1:

(2.9) $|I_1| \le c_0\left(\int_0^t |\nabla w_m(s)| ds\right)|\nabla w_m(t)| + c_2\left(|g_1|_{L^2(\Sigma)}\right)\left(\int_0^t |w'_m(s)| ds + |\nabla w_m(t)|\right)$

Acotación de I_2:

$$|I_2| = \left|\int_0^t (a'(s)\Delta w_m(s), w_m(s)) ds\right| \le$$
$$\le \int_0^t |a'(s)||\nabla w_m(s)|^2 ds + \int_0^t |a'(s)||g_{1m}(s), w_m(s)|_\Gamma ds$$
$$\le c_0 \int_0^t |\nabla w_m(s)|^2 ds + c_3\left(|g_1|_{L^2(\Sigma)}\right)\left(\int_0^t |w_m(s)|_\Gamma^2 ds\right)^{1/2}$$

Del teorema 1.1 y notando que

$$\int_0^t |w_m(s)|^2 ds \le T\int_0^t \int_0^1 |w_m(\xi)|^2 d\xi ds = T\int_0^t (t-\xi)|w'_m(\xi)|^2 d\xi < T^2 \int_0^t |w'_m(\xi)|^2 d\xi$$

resulta

(2.10) $|I_2| \le c_0 \int_0^t |\nabla w_m(s)|^2 ds + c_4\left(|g_1|_{L^2(\Sigma)}\right)\left(\int_0^t |w'_m(s)|^2 ds + \int_0^t |\nabla w_m(s)|^2 ds\right)^{1/2}$

Acotación de I_3:

(2.11)

$$|I_3| = \left|a(t)(g_{1m}(t), w_m(t))_\Gamma - \int_0^t a'(s)(g_{1m}(s), w_m(s))_\Gamma ds - \int_0^t a(s)(g'_{1m}(s), w_m(s))_\Gamma ds\right|$$

$$\le c_5\left(|g|_{L^2(\Sigma T)}\right)\left(\int_0^t |w'_m(s)|^2 ds + |\nabla w_m(t)|\right) + c_6\left(|g_1|_{L^2(\Sigma)}\right)\left[\int_0^t \left(|w'_m(s)|^2 + |\nabla w_m(s)|^2\right) ds\right]^{1/2} +$$
$$+ c_7\left(|g|_{L^2(\Sigma)}\right)\left(\int_0^t |w'_m(s)|^2 + |\nabla w_m(s)|^2\right)^{1/2}$$

donde

$c_0 = \max_{s\in[0,T]} |a'(s)|$ y c_i, $i = 1,2,\ldots,7$ dependen, según el caso únicamente de $|g|_{L^2(\Sigma)}$ o $|g_1|_{L^2(\Sigma)}$

Las acotaciones (2.9), (2.10) y (2.11) en (2.8) implican:

$$(2.12)\quad |w_m'(t)|^2 + |\nabla w_m(t)|^2 + \int_0^t |w_m'(s)|_4^4 ds \le k_0 + k_1 \int_0^t \left(|w_m'(s)|^2 + |\nabla w_m(s)|^2\right) ds$$

siendo k_0 y k_1 constantes independientes de m.

De (2.12) resulta:

(2.13) (w_m') acotada en $L^\infty\left(0,T,L^2(\Omega)\right) \cap L^4(Q)$

(2.14) (∇w_m) acotada en $L^\infty\left(0,T,L^2(\Omega)\right)$

De (2.13)

(2.15) (w_m) acotada en $L^\infty\left(0,T,L^2(\Omega)\right)$

En consecuencia:

$$(w_m) \text{ acotada en } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$
$$(w_m') \text{ acotada en } L^\infty\left(0.T;L^2(\Omega)\right) \cap L^4(Q)$$

Esto implica la existencia de una subsucesión aún denotada (w_m) tal que:

(2.16) $w_m \xrightarrow{*} w$ en $L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega)\right)$

(2.17) $w_m' \xrightarrow{*} w'$ en $L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$
$w_m' \longrightarrow w'$ en $L^4(Q)$

De (2.16), (2.17), (2.6) y teoremas del trazo se sigue que w es solución del sistema (2.4), en la clase:

(2.18) $w \in L^\infty\left(o,T;H^1(\Omega)\right)$

(2.19) $w' \in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \cap L^4(Q)$

La igualdad (2.3), (2.18) y (2.19) implican la existencia de la solución ultradébil de (*) satisfaciendo (2.1) y (2.2). La unicidad se realiza de manera standard.

Obs.- Se demuestra que para $\lambda = 0$, la solución u de (*) definida por $u = \frac{\partial w}{\partial t}$ coincide con la solución definida por transposición (ver Fuentes [1]), cuando $g \in L^2(\Sigma)$.

Bibliografía

[1] **Fuentes R.**, Controle Exato de uma Equacao de Ondas con Coeficientes Variaveis. Tese de Doutorado, Instituto de Matemática - UFRJ. Brásil (1991).

[2] **Lions J.L.**, Ultra Weak Solutions Of non Linear Partial Differential Equations. An. Acad. Brasil. Cienc. 52 (1980) 7-10

[3] **Medeiros L.A., Rivera P.H.**, Iniciacao aos Espacos de Sobolev, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, R.J. Brasil, (1997).