**PESQUIMAT**
Revista del Instituto de
Investigación de la Facultad
de Ciencias Matemáticas de la U.N.M.S.M
Vol. N°1,pp 27-47 Lima – Perú Julio-1998

# CONTROLE EXATO PARA UM OPERADOR DO TIPO $\Delta^{2P}$

**Ricardo Fuentes Apolaya** [1]

**Pedro Gamboa Romero** [2]

RESUMO

Neste trabalho estudamos um problema de Controlabilidade Exata para uma equação do tipo

$$u'' + \Delta^{2p} u = 0$$

em um domínio não cilíndrico.

PALAVRAS CHAVES :

Equação da energia. Desigualdade direta e inversa. Solução ultrafraca. Controlabilidade exata.

## 1. Introdução e Preliminares

Seja $\Omega$ um domínio limitado de $R^n$ com fronteira de classe $C^{4p}$ e suponhamos que $\Omega$ contém a origem de $R^n$. Consideramos a função contínua $k : [0, +\infty[ \rightarrow R$

[1] Profesor do Instituto de Matemática-UFF, Rua Mário de Santos Braga S/N, Niteroi CEP:24210. E.Mail:ganrefa@vm.uff.br

[2] Profesor do Instituto de Matemática-UFRJ,C.P.68530- CEP:21944 Rio de Janeiro E.Mail: pgamboa@dmm.im.ufrj.br

verificando:

$$\left|\begin{array}{l} k \in W^{3,+\infty}_{Loc}(0,+\infty) \\ 0 < k_0 = \inf\limits_{t\geq 0} k(t), \quad k_1 = \sup\limits_{t\geq 0} k(t) < +\infty \\ \sup\limits_{t\geq 0} |k'(t)| = \tau < \frac{1}{M}, \quad M = \sup\{\|x\|; x \in \Omega\} \\ L_1 = \int_0^\infty |k'(t)|\, dt, \quad L_2 = \int_0^\infty |k''(t)|\, dt \end{array}\right. \tag{1.1}$$

Estudamos a controlabilidade exata na fronteira para o problema:

$$\left|\begin{array}{l} Lw = 0 \quad \text{em} \quad Q \\ \frac{\partial^j w}{\partial \nu^j} = 0, \;\; j = 0, 1, \ldots, 2(p-1) \quad \text{sobre} \quad \Sigma \\ \frac{\partial^{2p-1} w}{\partial \nu^{2p-1}} = g \quad \text{sobre} \quad \Sigma \\ w(0) = w^0, \;\; w'(0) = w^1 \quad \text{em} \Omega \end{array}\right. \tag{1.2}$$

onde

$$Lw = w'' + b(t)\Delta^{2p} w + \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y,t)\frac{\partial w}{\partial y_j}\right) +$$
$$b_i(y,t)\frac{\partial w'}{\partial y_i} + d_i \frac{\partial w}{\partial y_i}.$$

O problema de controlabilidade exata na fronteira do sistema (1.2) formula-se da forma seguinte:

Dado $T > 0$, para cada $\{w^0, w^1\}$ em um espaço adequado, queremos determinar um controle na fronteira, denotado por $g$, de modo que a solução $w$ do sistema (1.2) satisfaz a condição final:

$$w(T) = w'(T) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

O estudo do problema de controlabilidade exata do sistema (1.1) será feito aplicando o método HUM o qual foi introduzido por J.L. Lions. Isto é possível pois o sistema (1.1) tem unicidade, reversibilidade e unicidade de soluções.

Diversos autores estudaram o problema de controlabilidade exata na fronteira de equações em derivadas parciais, dentre eles podemos mencionar: R. Fuentes [4], L.A. Medeiros e R. Fuentes [5], J.A. Soriano [12], J.P. Filho [2], J.P. Puel [9], C. Fabre [3], M.M. Cavalcante [1], M. Milla Miranda e L.A. Medeiros [8] e M. Milla Miranda [7], as idéias deste último trabalho nos permite analisar de forma apropriada o problema de controlabilidade exata, do sistema (1.1).

Se $x^0 \in R^n$ fixo qualquer. Definimos

$$m(x) = x - x^0 = (x_\ell - x_\ell^0) = (m_\ell) 1 \leq \ell \leq n$$

$$R(x^0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} \|m(x)\|.$$

Por convenção cada índice repetido indica uma soma. Por exemplo

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right).$$

Denotamos por $\lambda_0$ o primeiro valor próprio do problema:

$$\left|\begin{array}{l} \Delta^{2p} w = -\lambda_0^2 \Delta w \quad \text{em} \quad \Omega \\ w \in H_0^2(\Omega) \end{array}\right.$$

O valor próprio $\lambda_0$ é caracterizado por $\lambda_0^2(p) = \min_{w \in H_0^2(\Omega)-\{0\}} \dfrac{|\Delta^p w|^2}{|\nabla^p w|^2}$ então

$$|\nabla w| \leq \frac{1}{\lambda_0}|\Delta^p w|, \quad \forall\, w \in H_0^2(\Omega).$$

Analogamente, seja $\mu_0$ o primeiro valor próprio do problema:

$$\left| \begin{array}{l} \Delta^2 w = \mu_0^2 w \quad \text{em} \quad \Omega \\ \\ w \in H_0^2(\Omega). \end{array} \right.$$

O valor próprio é caracterizado por $\mu_0 = \min_{w \in H_0^2(\Omega)-\{0\}} \dfrac{|\Delta w|^2}{|w|^2}$ então

$$|w| \leq \frac{1}{\mu_0}|\Delta w|, \quad \forall\, w \in H_0^2(\Omega).$$

Seja $L^*$ o operador adjunto de $L$ definido por:

$$L^* z = z'' + b(t)\Delta^{2p} z + \tfrac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y,t)\tfrac{\partial z}{\partial y_j}\right) +$$
$$b_i \tfrac{\partial z'}{\partial y_i} + c z' + d_i \tfrac{\partial z}{\partial y_i} + f z.$$

Lembrando, também o operador

$$-\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \ \text{ é uma isometria}$$

resulta que, em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, a norma usual é equivalente à norma definida por

$|\Delta u|_{L^2(\Omega)}$.

Portanto, o operador inverso $(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ é também isometria. Dado que $\Omega$ é de classe $C^{4p}$, em forma similar que para o operador $-\Delta$, fazendo uso de resultados de regularidade (ver [11]), resulta que em $H_0^{2p}(\Omega) \cap H^{4p}(\Omega)$, a norma definida por $|\Delta^p u|_{L^2(\Omega)}$ é equivalente à norma usual.

## 2. Resultado Principal e Aplicação de H.U.M.

Com as notações e hipóteses consideradas no presente contexto temos o resultado central deste trabalho.

**Teorema 2.1.** Para $T > T_0$ e cada par de dados iniciais $\{w^0, w^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-2p}(\Omega)$ existe um controle $g \in L^2(\Sigma)$ tal que a solução ultrafraca ou definida por transposição do problema (1.2) verifica:

$$w(T) = w'(T) = 0.$$

**Demonstração:** Dado $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ definimos o problema misto homogêneo seguinte:

$$\left| \begin{array}{l} L^*\varphi = 0 \quad \text{em} \quad Q \\ \frac{\partial^i \varphi}{\partial \nu^i} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \;\; i = 0, 1, \ldots, 2(p-1) \\ \varphi = \varphi^0, \;\; \varphi'(0) = \varphi^1 \quad \text{em} \quad \Omega \end{array} \right. \tag{2.1}$$

A única solução fraca $\varphi = \varphi(x,t)$ de (2.1) satisfaz $\Delta^p \varphi \in L^2(\Sigma)$, conferir seção 4.

Usando a solução $\varphi = \varphi(x,t)$ de (2.1), consideramos o seguinte problema retardado:

$$\left| \begin{array}{l} L\psi = 0 \quad \text{em} \quad Q \\ \frac{\partial^i \psi}{\partial \nu^i} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \ i = 0, 1, \ldots, 2(p-1) \\ \frac{\partial^{2p-1}\psi}{\partial \nu^{2p-1}} = \Delta^p \varphi \quad \text{em} \quad \Sigma \\ \psi(T) = 0, \ \psi'(T) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.2}$$

O Teorema 5.1 da seção 5, garante que existe uma única solução ultrafraca $\psi = \psi(x,t)$ tal que

$$\psi \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-2p}(\Omega)).$$

### O Operador $\Lambda$

Pelas consideração anteriores, podemos definir o operador

$$\Lambda : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to H^{-2p}(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

$$\Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{\psi'(0) - \tfrac{2k'(0)}{k(0)} y_i \tfrac{\partial \psi}{\partial y_i}(0), -\psi(0)\}$$

Dado que $\psi$ é solução ultrafraca, temos que

$$0 = < \psi'(0) - \tfrac{2k'(0)}{k(0)} y_i \tfrac{\partial \psi}{\partial y_i}(0), \varphi^0 > -(\psi(0), \varphi^1)$$
$$- \textstyle\int_\Sigma b(t) |\Delta^p \varphi|^2 \, d\Sigma$$

equivale:

$$< \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\varphi^0, \varphi^1\} >= \int_\Sigma b(t) |\Delta^p \varphi|^2 \, d\Sigma. \tag{2.3}$$

Em $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ temos a forma quadrática:

$$||\{\varphi^0, \varphi^1\}||_F^2 = \int_\Sigma b(t) |\Delta^p \varphi|^2 \, d\Sigma.$$

Pelas desigualdades direta e inversa, resulta que $|| \quad ||_F$ é norma equivalente à norma usual em $H_0^{2p}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, concluímos que:

$$F = \overline{D\,(\Omega) \times D\,(\Omega)}^{||\cdot||_F} = H_0^{2p}(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Podemos estender $\Lambda : F \to F'$, sendo coercivo por (2.3) resulta ser um isomorfismo entre $F$ e $F'$.

Portanto, dado $\left\{ w^1 - 2\dfrac{k'(0)}{k(0)} y_i \dfrac{\partial w^0}{\partial y_i}, -w^0 \right\} \in F'$, existe um único $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in F$ tal que:

$$\Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\} = \left\{ w^1 - 2\frac{k'(0)}{k(0)} y_i \frac{\partial w^0}{\partial y_i}, -w^0 \right\}$$

Donde por unicidade $w = \psi$ é solução de nosso problema verificando $w(0) = w^0$, $w'(0) = w^1$.

## 3. O Problema Homogêneo

Definamos algumas notações a usar neste trabalho: No espaço $L^2(\Omega)$ denotemos com $(\cdot\,,\cdot)$ e $|\cdot|$ o produto interno e norma. Analogamente denotamos $((\cdot\,,\cdot))$ e $\|\cdot\|$ o produto interno e norma do espaço $H_0^{2p}(\Omega)$, $(p \in \mathbf{Z}^+)$. Os espaços $L^2(\Omega)$, $H_0^{2p}(\Omega)$, $H^{4p}(\Omega)$, $H^{-2p}(\Omega)$ serão denotados por $L^2$, $H_0^{2p}$, $H^{4p}$ e $H^{-2p}$. A dualidade entre o espaço $V$ e seu dual $V'$ é denotada por $<\cdot\,,\cdot>$.

Definamos o operador

$$Rz = z'' + b\Delta^{2p}z + \frac{\partial}{\partial y_i}\left\{a_{ij}\frac{\partial}{\partial y_j}z\right\} + b_i\frac{\partial}{\partial y_i}z' + cz' + d_i\frac{\partial}{\partial y_i}z + fz$$

onde os coeficientes do operador verificam:

- $b \in W^{2,+\infty}([0,+\infty[)$ tal que $b(t) > 0$ para todo $t \geq 0$, e
  $0 < b^0 = \inf\{b(t); t \geq 0\}, b^1 = \sup\{b(t); t \geq 0\} < +\infty.$
- $a_{ij} \in C^1(\overline{Q})$ tal que $a_{ij} = a_{ji}$ e $a''_{ij} \in L^\infty(Q)$ $i, j = 1, 2, \ldots, n$
- $b_i, c, d_i, f \in W^{1,+\infty}(0,T; L^\infty(\Omega))$, $\frac{\partial}{\partial y_i}b_i \in L^\infty(Q)$.

Queremos achar a solução do seguinte problema:

$$\left|\begin{array}{l} Rz = h \quad \text{em} \quad Q \\ z = \frac{\partial}{\partial\eta}z = \ldots = \frac{\partial^{2p-1}}{\partial\eta^{2p-1}}z = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma \\ z(0) = z^0, \ z'(0) = z^1 \quad \text{em} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{3.1}$$

sendo

$$\{z^0, z^1, h\} \in H_0^{2p} \times L^2 \times L^1(0,T;L^2).$$

**Observação 3.1**:

(i) $\dfrac{d}{dt}(b\Delta^p z, \Delta^p z) = b'|\Delta^p z|^2 + 2b(\Delta^p z, \Delta^p z')$ se $z, z' \in H_0^{2p}$, $b \in W^{2,+\infty}$.

(ii) Aplicando a fórmula de Green, obtemos

$$\left(b_i \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi, \varphi\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}b_i\varphi, \varphi\right) \ ; \text{se } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

**Teorema 3.1.** Se $\{z^0, z^1, h\} \in H_0^{2p} \cap H^{4p} \times H_0^{2p} \times W^{1,1}(0,T;L^2)$, então existe uma única solução forte $z$ do Problema (3.1) na classe:

$$z \in C([0,T]; H_0^{2p} \cap H^{4p}) \cap C^1([0,T]; H_0^{2p})$$

e satisfaz:

$$Rz = h \quad \text{em} \quad L^1(0,T;L^2).$$

A demonstração do Teorema 3.1 se faz aplicando o Método de Galerkin, e a Observação 3.1. Este resultado nos leva ao seguinte resultado.

**Teorema 3.2.** Se $\{z^0, z^1, h\} \in H_0^{2p} \times L^2 \times L^1(0,T;L^2)$, então

(i) Existe uma única solução fraca $z$ do Problema (3.1), na classe:

$$z \in C([0,T]; H_0^{2p}) \cap C^1([0,T]; L^2).$$

(ii) A aplicação linear:

$$H_0^{2p} \times L^2 \times L^1(0,T;L^2) \to C([0,T]; H_0^{2p}) \cap C^1([0,T]; L^2)$$

$$\{z^0, z^1, h\} \mapsto z$$

é contínua, sendo $z$ solução fraca do Problema (3.1).

(iii) A solução $z$ do Problema (3.1) satisfaz:

$$E(t) = E(0) = \tfrac{1}{2}\int_0^t b'(s)|\Delta^0 z(s)|^2\,ds - \int_0^t \left(\tfrac{\partial}{\partial y_i}\left[a_{ij}\tfrac{\partial}{\partial y_j} z\right], z'\right) ds +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_0^t \left(\tfrac{\partial}{\partial y_i} b_i\, z', z'\right) ds - \int_0^t (Pz, z')ds + \int_0^t (h, z')\,ds$$

onde

$$Pz = cz' + d_i \frac{\partial}{\partial y_i} z + fz, \quad E(t) = \frac{1}{2}|z'(t)|^2 + \frac{1}{2} b(t)|\Delta^p z(t)|^2.$$

Na demonstração do Teorema 3.2 usamos o fato que os espaços $H_0^{2p} \cap H^{4p}$, $H_0^{2p}$ e $W^{1,1}(0,T;L^2)$ são densos em $H_0^{2p}$, $L^2$ e $L^1(0,T;L^2)$.

Agora consideremos o seguinte problema:

$$\left|\begin{array}{lll} Rz = h' & \text{em} & Q \\ z = \frac{\partial}{\partial\eta}z = \ldots = \frac{\partial^{2p-1}}{\partial\eta^{2p-1}}z = 0 & \text{sobre} & \Sigma \\ z(0) = z^0,\ z'(0) = z^1 & \text{em} & \Omega \end{array}\right. \tag{3.2}$$

**Observação 3.2:** No Problema (3.2) se $h' \in L^1(0,T;L^2)$ então a solução fraca $z$ está na classe (i) do Teorema 3.2.

Obtemos o seguinte resultado

**Teorema 3.3.** Se $h \in L^2(0,T;H_0^{2p})$ e $h' \in L^2(0,T;L^2)$ com $h(0) = 0$; então toda solução fraca $z$ do Problema (3.2) satisfaz:

$$|z'(t) - h(t)| + |\Delta^p z(t)| \leq c \int_0^T |\Delta^p h(t)|\, dt \tag{3.3}$$

para todo $t \in [0,T]$, onde $c$ é uma constante independente de $z$ e $h$.

**Observação 3.3.** O Problema (3.1) também tem solução se substituirmos $t = 0$ por $t = T$ nos dados iniciais.

## 4. Desigualdade Direta e Inversa

Nesta parte nosso objetivo é obter estimativas para $\Delta^p z$, sendo $z$ a solução fraca do problema:

$$\left|\begin{array}{l} L^* z = h \quad \text{em} \quad Q \\ z = \frac{\partial}{\partial\eta} z = \ldots = \frac{\partial^{2p-1}}{\partial\eta^{2p-1}} z = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma \\ z(0) = z^0, \; z'(0) = z^1 \quad \text{em} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{4.1}$$

onde o operador $L^*$ é definido na seção 1. Observemos que os coeficientes do operador $L^*$ verificam as condições que caracterizam os coeficientes do operador $R$. Nesse caso todos os resultados obtidos no item 3 são válidos para o Problema (4.1).

Denotemos

$$a_{ij} = \left[\frac{k'(t)}{k(t)}\right]^2 y_i u_j, \quad b = \left[\frac{1}{k(t)}\right]^{4p}, \quad b_i = -2\frac{k'(t)}{k(t)} y_i .$$

Logo, depois de fazer alguns cálculos, obtemos que

$$L^* z = z'' + b\Delta^{2p} z + D_i(a_{ij} D_j z) + \frac{1}{2} D_i(b_i z') + \frac{1}{2} D_i(b_i z)' + D_i\left[n\left(\frac{k'}{k}\right)^2 y_i z\right]. \tag{4.2}$$

A energia do sistema (4.1) é definido:

$$E(t) = \frac{1}{2}|z'(t)|^2 + \frac{1}{2} b(t)|\Delta^p(t)|^2 \tag{4.3}$$

logo, se $t = 0$ em (4.3), obtemos

$$E_0 = E(0) = \frac{1}{2}|z^1|^2 + \frac{1}{2}b(0)|\Delta^p z^0|^2. \tag{4.4}$$

**Teorema 4.1.** Se $z$ é uma solução fraca do Problema (4.1), então

(i) se $h = 0$ em (4.1), obtemos

$$E_0 e^{-c^*} \leq E(t) \leq E_0\, e^{c^*} \text{ para todo } t \in [0, +\infty[$$

(ii) se $h \neq 0$ em (4.1), obtemos

$$E(t) \leq \left\{ E_0 + \left[ \int_0^T |h(t)|\, dt \right]^2 \right\} e^{c^*} \text{ para todo } t \in [0, T]$$

onde a constante $c^*$ é definido por

$$\begin{aligned} c^* = \{&4p\, k_0^{-1} + nM^2 c_0 \tau k_0^{-2} + n c_0 M^2 \tau k_1^{4p-2} + 6nk_0^{-1} + n(n+1)\tau M k_0^{-2} + \\ &+ n(n+1) c_0 M k_1^{4p-2} + n(n+1)\tau\lambda_0^{p/2} k_0^{-2} + n(n+1)\tau\lambda_0^{p/2} k_1^{4p-2}\} L_1 + \\ &+ \{n c_0 M k_0^{-1} + n c_0 M k_1^{4p-1} + n\lambda_0^{p/2} k_0^{-1} + n\lambda_0^{p/2} k_1^{4p-1}\} L_2 \,. \end{aligned}$$

Lembramos algumas notações:

$$0 < k_0 = \inf\{k(t); t \geq 0\}, \;\; k_1 = \sup\{k(t) l t \geq 0\}, \;\; \tau = \sup\{k'(t); t \geq 0\}$$

$$L_1 = \textstyle\int_0^{+\infty} |k'(t)|\, dt, \;\; L_2 = \int_0^{+\infty} |k''(t)|\, dt, \;\; M = \sup\{||x||; x \in \Omega\}.$$

A seguir enunciamos um lema, que é fundamental para a desigualdade direta e inversa.

**Lema 4.2**. Seja $q = (q_\ell) \in [C^{2p}(\bar{\Omega})]^n$ um campo vetorial. Então toda solução fraca $z = z(x,t)$ do problema (4.1) verifica:

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma b(t) q_\ell n_\ell |\Delta^p z|^2 d\Sigma = \left(z' + \tfrac{1}{2} D_i(b_i z), q_\ell D_\ell z\right)\Big|_0^T +$$

$$+ \int_\Omega b(t)\Delta^p z(\Delta^p q_\ell \, D_\ell z + C_p \, D_i(\Delta^{p-1} q_\ell) D_i(D_\ell z) + \ldots$$

$$+ C_p \, D_i q_\ell \, D_i[\Delta^{p-1}(D_\ell z)]) - \tfrac{1}{2}\int_\Omega b(t) D_\ell q_\ell |\Delta^p z|^2 +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\iint D_\ell q_\ell (z'^2 - a_{ij} \, D_i z \, D_j z) + (n+1)\iint \left(\tfrac{k'}{k}\right)^2 y_i q_\ell \, D_i z \, D_\ell z +$$

$$+ \iint a_{ij} D_j z \, D_i q_\ell \, D_\ell z + \tfrac{1}{2}\iint D_i b_i \, D_\ell z \, q_\ell \, z' + \tfrac{1}{2}\iint D_\ell b_i \, D_\ell z \, q_\ell \, z' +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\iint z \, D_\ell b_i \, D_\ell q_\ell \, z' + \tfrac{1}{2}\iint b_i \, D_i z \, D_\ell q_\ell \, z' - \tfrac{1}{2}\iint b_i z' \, D_i q_\ell \, D_\ell z -$$

$$- \tfrac{1}{2}\iint n^2 \left(\tfrac{k'}{k}\right)^2 \, D_\ell q_\ell \, z^2 - \iint h \, q_\ell \, D_\ell z.$$

**Observação 4.1**. Na prova do lema, usamos o multiplicador $q_\ell D_\ell z$ na equação $(4.1)_1$, tendo em conta as condições de fronteira o termo $(b(t)\Delta^{2p} z, q_\ell D_\ell z)$ estima-se como segue:

$$(b(t)\Delta^{2p} z, q_\ell D_\ell z) = (b(t)\Delta^p z, \Delta^p(q_\ell D_\ell z)) - \int_\Sigma \Delta^p z \frac{\partial}{\partial n}[\Delta^{p-1}(q_\ell D_\ell z)] d\Sigma.$$

Da propriedade: $\gamma_1[\Delta^{p-1}(q_\ell D_\ell z)] = q_\ell n_\ell \Delta^p z$ em $\Sigma$, tem-se

$$= (b(t)\Delta^p z, \Delta^p(q_\ell D_\ell z)) - \int_\Sigma q_\ell n_\ell |\Delta^p z|^2 \, d\Sigma.$$

Pela regra de Leibniz para derivadas, resulta que

$$\Delta^p(q_\ell D_\ell z) = \Delta^p q_\ell\, D_\ell z + C_p D_i(\Delta^{p-1} q_\ell) D_i(D_\ell z) +$$
$$\ldots + C_p D_i q_\ell\, D_i[\Delta^{p-1}(D_\ell z)] + q_\ell\, \Delta^p(D_\ell z)$$

onde $C_p$ é uma constante que depende de $p$.

Portanto,

$$(b(t)\Delta^{2p} z, q_\ell D_\ell z) = (b(t)\Delta^p z, \{\Delta^p q_\ell\, D_\ell z +$$
$$+ C_p D_i(\Delta^{p-1} q_\ell) D_i(D_\ell z) + \ldots + C_p D_p D_i q_\ell\, D_i[\Delta^{p-1}(D_\ell z)] + q_\ell\, \Delta^p(D_\ell z)\}) -$$
$$- \int_\Sigma b(t) q_\ell n_\ell |\Delta^p z|^2\, d\Sigma.$$

**Observação 4.2.** Temos que $q_\ell \Delta^p(D_\ell z)$ é o último termo do desenvolvimento de $\Delta^p(q_\ell D_\ell z)$, estimamos a expressão $(b(t)\Delta^p z, q_\ell \Delta^p(D_\ell z))$ como segue:

$$(b(t)\Delta^p z, q_\ell \Delta^p(D_\ell z)) = \int_\Omega b(t)\Delta^p z\, q_\ell\, D_\ell(\Delta^p z) =$$
$$= \int_\Omega b(t) q_\ell \tfrac{1}{2} D_\ell |\Delta^p z|^2 = -\tfrac{1}{2}\int_\Omega b(t) D_\ell q_\ell |\Delta^p z|^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\int_\Omega b(t) q_\ell n_\ell |\Delta z|^2.$$

Usamos isto na última igualdade da Observação 1, tem-se:

$$(b(t)\Delta^{2p}z, q_\ell D_\ell z) = (b(t)\Delta^p z, \{\Delta^p q_\ell D_\ell z +$$

$$+C_p D_i(\Delta^{p-1}q_\ell) D_i(D_\ell z) + \ldots + C_p D_i q_\ell\, D_i[\Delta^{p-1}(D_\ell z)]\} -$$

$$-\tfrac{1}{2}\int_\Omega b(t) D_\ell Q_\ell |\Delta^p z|^2 - \tfrac{1}{2}\int_\Sigma b(t) q_\ell \eta_\ell |\Delta^p z|^2\, d\Sigma.$$

**Observação 4.3**. Denotamos por $S$ a soma seguinte:

$$S = (b(t)\Delta^p z, \Delta^p q_\ell\, D_\ell z + C_p D_i(\Delta^{p-1}q_\ell) D_i(D_\ell z) + \ldots$$

$$\ldots + C_p D_i q_\ell\, D_i[\Delta^{p-1}(D_\ell z)]).$$

Observamos que o termo com derivada de maior ordem para $z$ é $2p$, dado que $z \in H^{2p}(\Omega)$, $q_\ell \in C^{2p}(\overline{\Omega})$, teremos que

$$|S| \leq C(p,q)||z||_{H^{2p}(\Omega)},$$

$C(p,q)$ uma constante que depende do campo $q$ e $p$.

**Observação 4.4**. Se consideramos $q_\ell = m_\ell$, dado que $D_i(q_\ell) = 1$, se $i = \ell$ e zero para $i \neq \ell$, portanto as derivadas de ordem maior ou igual a 2 valem zero, a soma $S$ reduz-se ao termo:

$$(b(t)\Delta^p z, C_p D_i q_\ell\, D_i[\Delta^{p1}(D_\ell z)]) = C_p(b(t)\Delta^p z, \Delta^p z) = C_p b(t)|\Delta^p z|^2.$$

**Teorema 4.2.** Seja $q = (q_i) \in C^{2p}(\overline{\Omega})$ e $\{z^0, z^1, h\} \in H_0^{2p}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0,T; L^2(\Omega))$, então a solução fraca do problema (4.1) satisfaz a desigualdade:

$$\int_\Sigma |\Delta^p z|^2 \, d\Sigma \leq c \left[ E_0 + \left( \int_0^T |h| \, dt \right)^2 \right]$$

onde c independe de $z$ e $E_0$.

**Observação 4.5.** Na prova fazemos as estimativas standard, usando estimativas da energia e Observação 4.3.

**Teorema 4.3.** Para $T > T_0(p)$, a solução fraca do problema (4.1) com $h = 0$, satisfaz:

$$\frac{R(y^0)}{2k_0^4} \int_\Sigma |\Delta^p z|^2 \, d\Sigma \geq c(T - T_0) E_0$$

onde

$$T_0(p) = \{nML_1 + \left[ \left( C_p - \tfrac{1}{2} \right) + 2L_1^4 \left( R(y^0)^2 \lambda_0^{-2} + \tfrac{(n-1)^2}{4} \mu_0^{-2} \right) \right] +$$
$$+ k_1^3 \lambda_0^{-1} [(n+1)\mu_0^{-1} + 2R(y^0)(n\tau\mu_0^{-1} + \lambda_0^{-1}) + c_0 + c_1 + c_2 + c_3\} e^{2c^*}$$

# 4. Regularidade de Solução Ultrafraca

Nesta seção consideramos o operador $L$ definido por:

$$Lw = w'' + b(t)\Delta^{2p} w + \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ a_{ij} \frac{\partial w}{\partial y_j} \right\} + b_i \frac{\partial w'}{\partial y_i} + C_i \frac{\partial w}{\partial y_i} \cdot$$

Estamos interessados no estudo do problema não homogêneo

$$\left|\begin{array}{l} Lw = 0 \quad \text{em} \quad Q \\ \frac{\partial^i w}{\partial \nu^i} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \;\; i = 0, 1, \ldots, 2(p-1) \\ \frac{\partial^{2p-1} w}{\partial \nu^{2p-1}} = g \quad \text{sobre} \quad \Sigma \\ w(0) = w^0, \;\; w'(0) = w^1 \quad \text{em} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{5.1}$$

onde os dados iniciais $w^0$ e $w^1$ não são regulares. Introduzimos o conceito de solução ultrafraca ou definida por transposição, motivados pela seguinte análise.

Procedemos formalmente, multiplicamos $(5.1)_1$ pela função $z = z(y,t)$, $y \in \Omega$, $t \in ]0,T[$ e integrando sobre $Q$, resulta:

$$\iint Lw\, z = \iint w'' z + \iint b(t)\Delta^{2p} w\, z + \iint \frac{\partial}{\partial y_i}\left\{a_{ij}\frac{\partial w}{\partial y_j}\right\} z +$$
$$+ \iint b_i \frac{\partial w'}{\partial y_i} z + \iint C_i \frac{\partial w}{\partial y_i} z.$$

Usando a fórmula de Green e integrando adequadamente, obtemos:

$$\iint Lw\, z = -\int_\Omega w'(0)z(0)dy + \int_\Omega w(0)z'(0)dy - \tag{5.2}$$

$$-\int_\Omega b_i(0)\frac{\partial w}{\partial y_i}(0)z(0)dy + \int_\Sigma g\, b(t)\Delta^p z\, d\Sigma + \iint w\, h$$

onde $z$ é solução do problema:

$$\left|\begin{array}{l} L^*z = h \quad \text{em} \quad Q \\ \frac{\partial^i z}{\partial \nu^i} = 0, \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \ i = 0, 1, \ldots, 2p-1 \\ z(T) = 0, \ z'(T) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{5.3}$$

Sabe-se que se $h \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, $z$ é uma solução fraca de (5.2) tal que $z \in C([0,T];\ H_0^{2p}(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$. Motivados pela igualdade (5.2), introduzimos a seguinte definição.

**Definição 5.1.** Dados $w^0 \in L^2(\Omega)$, $w^1 \in H^{-2p}(\Omega)$, $g \in L^2(\Sigma)$, dizemos que $w \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ é uma solução ultrafraca ou definida por transposição do problema (5.1), se verifica a igualdade

$$\int_0^T (w,h)\,dt = < w^1, z(0) > -(w^0, z'(0)) - < \frac{2k'(0)}{k(0)} y_i \frac{\partial w^0}{\partial y_i}, z(0) > -$$
$$- \int_\Sigma g\, b(t) \Delta^p z\, d\Sigma$$

para todo $z = z(x,t)$ solução fraca do sistema (5.3).

**Teorema 5.1.** O sistema (5.1) tem uma única solução ultrafraca $w$, para todo $\{w^0, w^1, g\} \in L^2(\Omega) \times H^{-2p}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$, tal que:

$$w \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-2p}(\Omega)).$$

Além disso

$$\|w\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|w'\|_{L^\infty(0,T;H^{-3/4}(\Omega))} \leq C(|w^0| + \|w^1\|_{H^{-3/4}(\Omega)} + |g|_{L^2(\Sigma)}.$$

Agradecimentos :

Aos profs. L.A. Medeiros e L.M. Miranda por seus valiosos comentários ao trabalho.

## 5. Bibliografia

[1] Cavalcante, M.M. Controlabilidade Exata da Equação da Onda com condição de Fronteira tipo Neumann, Tese de Doutorado, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, (1995).

[2] Filho, J. P. Estabilidade do sistema de Timoshenko, Tese de Doutorado, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, (1995).

[3] Fabre, C. et Puel, J. Comportement au voisinage du bord des solutions de l'équations des ondes, C.R. Acad. Sci. Paris, 310 série I (1990) pp. 621-625.

[4] Fuentes, R. Controlabilidade exata de uma equação de ondas com coeficientes variáveis, Tese de Doutorado, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, (1991).

[5] Medeiros, L.A. and Fuentes, R. Exact controllability for a model of the one dimensional elasticity, 36 Seminário Brasileiro de Análise, SBA, (1992).

[6] Medeiros, L.A. e Milla Miranda, M. Introdução aos espaços de Sobolev e às equações diferenciais parciais, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, (1989).

[7] Milla Miranda, M. HUM and the wave equations with variant /coefficient. Asymptotic Analysis 11 (1996), pp. 317–341.

[8] Milla Miranda, M. and Medeiros, L.A. Exact controllability for Schrödinger equations in non cylindrical domains, **41 Seminário Brasileiro de Análise**, RJ, (1995), Brasil.

[9] Puel, J.P. Contrôlabilité Exacte et comportement au voisinage du bord des solutions de l'équations de ondes at IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1991).

[10] Pedro, G.R. Controle exato para a equação Euler-Bernoulli num domínio não cilíndrico, Tese de Doutorado, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Dezembro (1995), Brasil.

[11] Lions, J.L. and Magenes, E. Problèmes aux Limites non homogènes et Applications, Vol. 1, Dunod, (1968).

[12] Soriano, J.A. Controlabilidade Exata de Equação de Onda com Coeficientes Variáveis, Tese de Doutorado, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, (1993).

[13] Zuazua, E. Lectures Notes on Exact control and stabilization, Instituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, R.J.