CAPÍTULO 2

SEMIGRUPO DE OPERADORES LINEALES

1. **Motivación**

En los preliminares fue visto que la función exponencial e^{tA}, donde $A \in \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$, es definida por

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \tag{2.1}$$

Cuando $A \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$ la exponencial es una función $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ que tiene las siguientes propiedades:

(a) $E(0) = 1$

(b) $E(t+s) = E(t)\,E(s);\ \forall t,\ s \geq 0$

(c) $\underset{t \to 0^+}{Lím} E(t) = 1$

Luego demostraremos que es la única función definida en $\mathbb{R}^+$ con valores en $\mathbb{R}$, que tiene esas propiedades.

Sin dificultad alguna, como se vio en preliminares, extendemos la exponencial al caso en que $A \in \mathcal{L}(X)$, donde la unidad en este caso es el operador identidad, $I : X \to X$.

Teorema 2.1 *Una función $E : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ satisface las condiciones:*

(a) $E(0) = I$

(b) $E(t+s) = E(t)E(s)$

(c') $\|E(t) - I\| \to 0$*; cuando* $t \to 0^+$

Si y solo si, $E(t) = e^{tA}$ *donde* $A \in \mathcal{L}(X) \wedge e^{tA}$ *es definida en* (2,1)

Observe que (c') es una convergencia uniforme, pero esto implica la convergencia fuerte.

i.e.(c) $\|(E(t) - I)x\| \to 0$; cuando $t \to 0^+$

Demostración.

Sea $A \in \mathcal{L}(X)$ y pongamos $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ como para cada $t \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ converge en norma entonces la aplicación

$$\begin{array}{rccc} E: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathcal{L}(X) \\ & t & \mapsto & E(t) = e^{tA} \end{array}$$

está bien definida y además:

(a) $E(0) = e^{0t} = I$

(b) Tener en cuenta el siguiente resultado:

$$\frac{(a+b)^p}{p!} = \sum_{n+m=p} \frac{a^n}{n!} \frac{b^n}{m!}$$

entonces

$$\begin{aligned} E(t+s) &= e^{(t+s)A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((t+s)A)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n A^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} . \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n A^n}{n!} = e^{tA} e^{sA} \end{aligned}$$

por tanto

$$E(t+s) = E(t) E(s)$$

(c') Tenemos

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$
$$\Rightarrow e^{tA} - I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

entonces tomando norma:

$$\left\| e^{tA} - I \right\| \leq t \|A\| e^{t\|A\|}$$

tomando límite cuando $t \to 0^+$:

$$\left\| e^{tA} - I \right\| \to 0$$

Reciprocamente:

Vamos a suponer que $E : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ satisface las condiciones (a), (b) y (c'), demostraremos en primer lugar que $\|E(t)\|$ es una función acotada en todo intervalo acotado.

Dado $\varepsilon > 0$ existe por (c') un $\delta > 0$ tal que

$$\|E(t) - I\| \leq \varepsilon \ ; \forall t \ \text{ tal que } 0 \leq t \leq \delta$$

y como

$$\left|\|E(t)\|-\|I\|\right| \leq \|E(t)-I\| \leq \varepsilon$$

$$\|E(t)\| \leq 1+\varepsilon = M \quad ; \quad \forall t \;\text{ tal que}: \; 0 \leq t \leq \delta$$

Además para cada real $t \geq 0$, existe $n \in \mathbb{Z}^{+}$ tal que:

$$t = n\delta + r \quad ; \quad \text{donde } 0 \leq r < \delta$$

por (b) tenemos

$$\begin{aligned} \|E(t)\| &= \|E(n\delta+r)\| = \|E(\delta)^{n} E(r)\| \leq \|E(\delta)\|^{n} \|E(r)\| \\ &\leq M^{n+1} = M.M^{n} \leq M.M^{\frac{t}{\delta}} = Me^{wt} \end{aligned}$$

donde: $w = \delta^{-1} \log M \geq 0$

por tanto si $t \in [0,T]$, $\|E(t)\| \leq Me^{wt}$

Ahora probamos la continuidad de E

Si $h > 0$:

$$\begin{aligned} \|E(t+h)-E(t)\| &= \|E(t)[E(h)-I]\| \\ &\leq \|E(t)\| \|E(h)-I\| \to 0 \end{aligned}$$

cuando $h \to 0$.

Si $0 < h \leq t$:

$$\begin{aligned} \|E(t-h)-E(t)\| &= \|E(t-h)[I-E(h)]\| \\ &\leq \|E(t-h)\| \|E(h)-I\| \to 0 \end{aligned}$$

cuando $h \to 0$ además $E(t-h)$ es acotado en $[0,t]$.

Como E es contínua entonces es integrable en el sentido de Riemann y

$$\underset{h\to 0}{Lím}\frac{1}{h}\int_0^h E(t)\,dt = E(0) = I$$

entonces podemos determinar un $\rho > 0$ tal que

$$\left\|\frac{1}{\rho}\int_0^\rho E(t)\,dt - I\right\| < 1$$

lo que implica que $\frac{1}{\rho}\int_0^\rho E(t)\,dt$ es inversible por tanto $\int_0^\rho E(t)\,dt$ es inversible en $\mathcal{L}(X)$

Además

$$\begin{aligned}\frac{E(h)-I}{h}\int_0^\rho E(t)\,dt &= \frac{1}{h}\int_0^\rho E(t+h)\,dt - \frac{1}{h}\int_0^\rho E(t)\,dt \\ &= \frac{1}{h}\int_0^{\rho+h} E(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_0^\rho E(t)\,dt\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $h \to 0$ la parte de la derecha, resulta convergente a $E(\rho) - I$ entonces

$$\underset{h\to 0^+}{Lím}\frac{E(h)-I}{h}\int_0^\rho E(t)\,dt = E(\rho) - I$$

Denotamos por

$$A = \underset{h\to 0^+}{Lím}\frac{E(h)-I}{h}$$

Se tiene que

$$A\int_0^\rho E(t)\,dt - E(\rho) = I$$

y de alli tenemos;

$$A = (E(\rho) - I) \left(\int_0^\rho E(h)\, dt \right)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$$

por tanto $E(t)$ es derivable a la derecha de 0.

Es decir,

$$\frac{d^+ E(0)}{dt} = A$$

Además por (b), tenemos $\forall h > 0$:

$$\frac{E(t+h) - E(t)}{h} = E(t) . \frac{E(h) - I}{h}$$

la parte de la derecha converge para $E(t) A$ cuando $h \to 0^+$

Entonces E es derivable a la derecha en todo $t \geq 0$

es decir $$\frac{d^+ E(t)}{dt} = E(t) A$$

Análogamente: $$\frac{d^+ E(t)}{dt} = AE(t)$$

También se cumple que

$$\frac{d^- E(t)}{dt} = \frac{d^+ E(t)}{dt} \quad ; \ \forall t > 0$$

Sea ahora la función

$$f(t) = E(t)\, e^{(x-t)A} \ ;$$

derivando tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{dE(t)}{dt} . e^{(x-t)A} - E(t)\, Ae^{(x-t)A} \\ &= E(t)\, Ae^{(x-t)A} - E(t)\, Ae^{(x-t)A} = 0 \end{aligned}$$

entonces f es constante.

Además: $f(0) = e^{xA}$,

entonces $E(t)\, e^{(x-t)A} = e^{xA}$

y de allí: $E(t) = e^{tA}$

2. **Semigrupos de Clase** C_0

Aquí veremos las generalización de la función exponencial

Definición 2.1 *Se dice que una apliación* $Z : \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ *es un semigrupo de operadores lineales acotados de* X *si:*

(i) $Z(0) = I$; donde I es el operador identidad de X

(ii) $Z(t+s) = Z(t)\, Z(s)$; $\forall t, s \in \mathbb{R}^{+}$

Se dice que el semigrupo Z es de clase C_0 si

(iii) $\underset{t \rightarrow 0^{+}}{Lím} \|(Z(t) - I)\, x\| = 0;\ \ \forall x \in X$

Para los semigrupos de clases C_0 son válidas las propiedades fundamentales de funciones exponenciales, que a continuación describiremos:

Proposición 2.1 *Si* Z *es un semigrupo de clase* C_0*, entonces* $\|Z(t)\|$ *es una función acotada en todo intervalo acotado* $[0, T]$.

Corolario 2.1 *Todo semigrupo de clase C_0 es fuertemente continuo en $\mathbb{R}^+$.*

Es decir, si $t \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\underset{s \to t}{Lím} Z(s)x = Z(t)x \ ; \ \forall x \in X$$

Observación Los semigrupo de clase C_0 son también conocidos por semigrupos fuertemente continuos, esto por el corolario (2.1)

Observación Si A es un operador lineal acotado de X , se tiene $\forall t \geq 0$

$$\left\| e^{tA} \right\| = \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|}$$

Si $\|A\| \leq w$ entonces : $\left\| e^{tA} \right\| \leq e^{wt}; \ \forall t \geq 0.$

Veremos una propiedad parecida para los semigrupos.

Definición 2.2 *Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ se dice que es subaditiva si*

$$p(t+s) \leq p(t) + p(s)$$

Lema 2.1 *Sea P una función subaditiva en $\mathbb{R}^+$ y acotada superiormente en todo intervalo acotado. Entonces*

$$\underset{t \to \infty}{Lím} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t>0} \frac{p(t)}{t}$$

Proposición 2.2 *Sea Z un semigrupo de clase C_0. Entonces*

$$\underset{t \to \infty}{Lím} \frac{\log \|Z(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log \|Z(t)\|}{t} = w_0$$

y para cada $w > w_0$, existe una constante $M \geq 1$ tal que

$$\|Z(t)\| \leq Me^{wt} \quad ; \ \forall t \geq 0$$

Observación. Cuando $w_0 < 0$ existe $M \geq 1$ tal que $\|Z(t)\| \leq M$; $\forall t \geq 0$ en ese caso se dice que Z es un semigrupo uniformemente acotado de clase C_0. Si además de esto $M = 1$ es dicho semigrupo de contracciones de clase C_0.

Ejemplos:

1. Las funciones exponenciales son semigrupos de clase C_0, en el teorema (1.1) vimos que cumple las condiciones y la observación de que la convergencia uniforme implica la convergencia fuerte.

2. Sea $X = C(\mathbb{R})$ el espacio de Banach de las funciones uniformente contínuas y acotadas en $\mathbb{R}$, con la norma

   $$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x)\|$$

   Para cada $t \geq 0$ y $f \in C(\mathbb{R})$ definimos

   $$(Z(t) f)(x) := f(x+t) = f_t(x)$$

   Entonces Z es un semigrupo de contracciones de clase C_0.

   En efecto:

   Para cada $t \geq 0$ y cada $f \in C(\mathbb{R})$ es inmediato que $f_t \in C(\mathbb{R})$,

   $$\begin{array}{rccc} Z(t): & C(\mathbb{R}) & \rightarrow & C(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & Z(t) f \end{array}$$

   es una aplicación lineal y es acotada pues

   $$\begin{aligned} (Z(t)(f+g))(x) &= (f+g)(x+t) = f(x+t) + g(x+t) \\ &= (Z(t) f)(x) + (Z(t) g)(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Z(t)(f+g) = Z(t)f + Z(t)g; \qquad f, g \in C(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} (Z(t)(\alpha f))(x) &= (\alpha f)(x+t) = \alpha f(x+t) \\ &= \alpha (Z(t) f)(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Z(t)(\alpha f) = \alpha Z(t) f \ ; \qquad f \in C(\mathbb{R})\,; \, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\|Z(t) f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x+t)\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x)\| = \|f\| < \infty$$

$$\Rightarrow \|Z(t)\| = 1$$

Entonces; $\begin{array}{rccc} Z: & \mathbb{R}^{+} & \rightarrow & \mathcal{L}(C(\mathbb{R})) \\ & t & \mapsto & Z(t) \end{array}$ está bien definida.

Además:

a) $(Z(0) f)(x) = f(x+0) = f(x) = (I.f)(x)$

$\Rightarrow Z(0) = I$

b) $(Z(s+t) f)(x) = f(x+s+t) = (Z(t) f)(x+s) = (Z(s) Z(t) f)(x)$.

c) $\|Z(t) f - f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x+t) - f(x)\| \rightarrow 0$; cuando $t \rightarrow 0^{+}$ pues f es uniformemente contínua.

Luego podemos afirmar que Z es un semigrupo de contracciones de clase C_0. Z es conocido como el semigrupo de las traslaciones a la izquierda en $C(\mathbb{R})$.

3. Sea $X = C[0, \infty]$, el espacio de las funciones f que son contínuas sobre $[0, \infty\rangle$ (contínuas sobre el lado derecho de 0) y que $f(x)$ tiende hacia un

límite finito cuando $x \to \infty$ (el límite varia con f) Consideremos como el ejemplo anterior la norma

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)|, x \geq 0\}$$

Para este caso definiendo como el ejemplo anterior

$$(Z(t)f)(x) = f(x+t) \quad ; \ x \geq 0, \ t \geq 0$$

se ve como el ejemplo anterior que es un semigrupo de clase C_0 de contracciones sobre X, llamado también el semigrupo traslación sobre X.

4. Sea K_t; $t > 0$ la función definida en $\mathbb{R}^n$ por

$$\begin{array}{rccl} K_t : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & K_t(x) := (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} . e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \end{array}$$

donde: $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ si ; $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $Z(t)$ definida en $L^2(\mathbb{R}^n)$ por

$$\begin{array}{rccl} Z(t) : & L^2(\mathbb{R}^n) & \to & L^2(\mathbb{R}^n) \\ & f & \mapsto & Z(t)f := \begin{cases} f & ; t = 0 \\ K_t * f & ; t > 0 \end{cases} \end{array}$$

Por tanto: $Z(0) = I$

$$\begin{aligned} (Z(t)f)(x) &= (K_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} . e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} . f(y)\, dy \\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} . f(y)\, dy \ ; \qquad \text{si } t > 0 \end{aligned}$$

Observese que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $K_t \in L^2(\mathbb{R}^n)$ por tanto $K_t * f$ es integrable en $\mathbb{R}^n$ para cada $t > 0$, esto nos garantiza la buena definición de $Z(t)f$ para cada $t \geq 0$.

Vamos a mostrar que Z es un semigrupo de contracciones de clase C_0 en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Consideremos la transformada de Fourier, esto es

$$\begin{array}{rccc} F: & L^2(\mathbb{R}^n) & \rightarrow & L^2(\mathbb{R}^n) \\ & f & \mapsto & F(f) \end{array}$$

dado por

$$F(f)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\, e^{-i(\xi,x)} d\xi$$

donde $(\xi, x) = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$.

Usaremos algunos resultados de la transformada de Fourier.

- F es una isometría

  es decir $\qquad \|F(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

- $F(K_t * f) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} F(K_t) . F(f)$
- $F(K_t * f)(x) = e^{-t|x|^2} F(f)(x)$
- $F(K_t)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-t|x|^2}$
- $-|x|^2 F(f) = F(\triangle f)$, donde $\triangle$ es el operador de Laplace en el sentido distribucional.

Por tanto ahora tenemos lo siguiente:

(i) $Z(0) = I$ por definiición

(ii) $Z(t+s) = Z(t)\,Z(s)$; $\forall t, s \in \mathbb{R}^{+}$. En efecto:

Tenemos que

$$\begin{aligned} F(K_t * K_s)(x) &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} F(K_t)\, F(K_s)(x) \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-t|x|^2} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-s|x|^2} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-(t+s)|x|^2} \\ &= F(K_{t+s})(x) \end{aligned}$$

entonces se sigue que: $K_t * K_s = K_{t+s}$ y de allí

$$\begin{aligned} Z(t+s)\,f &= K_{t+s} * f = (K_t * K_s) * f = K_t * (K_s * f) \\ &= Z(t)\,Z(s)\,f \;\; ; \;\; \forall t, s \in \mathbb{R}^{+} \end{aligned}$$

$\Rightarrow Z(t+s) = Z(t)\,Z(s)$; $\forall\;\; t, s \in \mathbb{R}^{+}$

(iii) $\underset{t \to 0^{+}}{Lím} \|(Z(t) - I)\,f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$; $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

En efecto:

$$\begin{aligned} F(Z(t)\,f - f) &= F(K_t * f - f) = F(K_t * f) - F(f) \\ &= e^{-t|.|^2} F(f) - F(f) \\ &= \left(e^{-t|.|^2} - 1\right) F(f) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|F(Z(t)\,f - f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(e^{-t|.|^2} - 1\right) \|F(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

tomando límite cuando $t \to 0^+$ tenemos

$$\underset{t\to 0^+}{Lím} \|F(Z(t)f - f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$$

y como F es una isometría entonces

$$\underset{t\to 0^+}{Lím} \|(Z(t) - I)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0 \ \ ; \ \ \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

por tanto Z es un semigrupo de clase C_0

Además tenemos que

$$\begin{aligned} \|Z(t)f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|K_t * f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|F(K_t * f)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |F(K_t * f)|^2 \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |F(f)|^2 \, dx \\ &= \|F(f)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

Observe que: $0 < e^{-t|x|^2} < 1$ entonces

$$\|Z(t)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \Rightarrow \|Z(t)\| \leq 1$$

por tanto $Z(t)$ es una contracción.

5. En el caso unidimensional tenemos

Sea $L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$ definimos para $t \geq 0$:

$$\begin{array}{rccl} Z(t): & L^p(\mathbb{R}) & \to & L^p(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & Z(t)f = \begin{cases} f & ; t = 0 \\ K_t * f & ; t > 0 \end{cases} \end{array}$$

donde K_t es definido por

$$K(x,t) = K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \ \ , \ \ t > 0$$

la función K es la solución fundamental de la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \ , \ \ t > 0$$

evidentemente Z es un semigrupo de clase C_0 sobre $L^p(\mathbb{R})$ llamado semigrupo Gauss-Weierstrass por tanto no sorprende que el semigrupo Gauss - Weierstrass juega un rol importante en la solución del problema de valor inicial para la ecuación del calor.

6. Analogo el semigrupo de Gauss - Weierstrass es el semigrupo de Poisson. Sea $L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$ y definimos para $t \geq 0$

$$\begin{array}{cccc} Z(t): & L^p(\mathbb{R}) & \rightarrow & L^p(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & Z(t) f = \begin{cases} f & ; t = 0 \\ K_t * f & ; t > 0 \end{cases} \end{array}$$

donde K_t es definido por

$$K(x,t) = K_t(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{t}{t^2 + x^2}\right) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}, \, t > 0$$

la función K es la solución fundamental de la ecuación de la onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

3.- **Generador Infinitesimal de semigrupos de clase C_0**

Definición 2.3 *Sea Z un semigrupo de clase C_0 en X definimos el operador:*

$$A : D(A) \rightarrow X$$

donde: $D(A) = \left\{ x \in X \quad / \quad \text{existe } \underset{t \rightarrow 0^+}{Lím} \left(\frac{Z(t)-I}{t} \right)(x) \right\}$ *y*

$$Ax = \underset{t \rightarrow 0^+}{Lím} \left(\frac{Z(t) - I}{t} \right)(x) \quad , \quad \forall x \in X$$

es dicho "generador infinitesimal" del semigrupo Z.

Vamos a designar por A_t al operador lineal acotado

$$A_t = \frac{Z(t) - I}{t} \quad ; \quad t > 0$$

Proposición 2.3 *$D(A)$ es un subespacio vectorial de X y A un operador lineal.*

Proposición 2.4 *Sea Z un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal de Z.*

(i) Si $x \in D(A)$ entonces:

$$Z(t)x \in D(A) \quad , \forall t \geq 0 \quad y \quad \frac{d}{dt} Z(t)x = AZ(t)x = Z(t)Ax$$

(ii) Si $x \in D(A)$ entonces

$$Z(t)x - Z(s)x = \int_s^t AZ(u)xdu = \int_s^t Z(u)Axdu$$

(iii) Si $x \in X$ entonces:

$$\int_o^t Z(u)\,xdu \in D(A) \qquad y \qquad Z(t)\,x - x = A\int_0^t Z(u)\,xdu$$

Proposición 2.5 *El generador infinetisimal de un semigrupo de clase C_0 es un operador lineal cerrado y su dominio es denso en X.*

Definición 2.4 *Sea Z un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal. Pongamos $A^0 = I$, $A^1 = A$ y suponiendo que A^{n-1} este definido, entonces definimos A^n :*

$$\begin{aligned} D(A^n) &= \left\{x \in X \ / \ x \in D\left(A^{n-1}\right) \quad y \quad A^{n-1}x \in D(A)\right\} \\ A^n x &= A\left(A^{n-1}x\right) \quad ; \forall x \in D(A^n) \end{aligned}$$

Proposición 2.6 *Sea Z un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal. Tenemos:*

(i) $D(A^n)$ es un subespacio de X y A^n es un operador lineal de X

(ii) Si $x \in D(A^n)$ entonces:

$$Z(t)\,x \in D(A^n)\,,\ \forall t \geq 0 \quad y \quad \frac{d^n}{dt^n} Z(t)\,x = Z(t)\,A^n x = A^n Z(t)\,x$$

(iii) Si $x \in D(A^n)$ entonces

$$Z(t)\,x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} A^k Z(a)\,x + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-u)^{n-1} A^n Z(u)\,xdu$$

(iv)

$$(Z(t)-I)^n x = \int_0^t \cdots \int_0^t Z(u_1+\cdots+u_n) A^n x du_1 \cdots du_n; \quad \forall x \in D(A^n)$$

(v) $\bigcap\limits_n D(A^n)$ *es denso en* X

Ejemplos:

1. Sea $Z(t) = e^{tA}$ donde $A \in \mathcal{L}(x)$ del ejemplo anterior en ese caso vimos que es un semigrupo de clase C_0.

   El generador infinitesimal de e^{tA} es A. En efecto:

   Para cualquier $f \in X$, tenemos:

$$\begin{aligned}
A_t f &= \left(\frac{Z(t)-I}{t}\right) f = \left(\frac{e^{tA}-I}{t}\right) f = \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n - I}{n!}}{t}\right) f \\
&= \left(\frac{I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} - I}{t}\right) f = \left(\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}}{t}\right) f \\
&= \left(\frac{tA + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}}{t}\right) f = \left(\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}}{t}\right) f \\
&= \left(\frac{tA + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}}{t}\right) f = Af + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(tA)^n}{t.n!} f\right) \\
&= Af + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{t^{n-1} A^n}{n!} f\right) = Af + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t^n A^{n+1}}{(n+1)!} f\right) \\
&= Af + t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t^{n-1} A^{n+1}}{(n+1)!} f\right)
\end{aligned}$$

   tomando límite cuando $t \to 0^+$ pues es contínua en t:

$$\underset{t\to 0^+}{Lím} A_t f = Af + 0 = Af$$

   i.e. A es el generador infinitesimal de e^{tA} con $D(A) = X$

2. Consideremos el semigrupo traslación a la izquierda en $C(\mathbb{R})$ del ejemplo anterior donde para cada $t \geq 0$ y $f \in C(\mathbb{R})$, $(Z(t)f)(x) = f(x+t)$

Veamos quien es el generador infinitesimal de $Z(t)$:

Si $f \in D(A)$, entonces existe

$$\underset{t\to 0^+}{Lím} A_t f(x) = \underset{t\to 0^+}{Lím} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

es uniformemente en x y ese límite pertenece a $C(\mathbb{R})$, luego f es derivable a la derecha y además

$$\frac{d^+}{dx} f(x) \in C(\mathbb{R})$$

Por el lema de Dini, f es derivable y $f' \in C(\mathbb{R})$.

Recíprocamente, si $f \in C(\mathbb{R})$ y $f' \in C(\mathbb{R})$ entonces se tiene

$$\begin{aligned}\frac{f(x+t) - f(t)}{t} - f'(x) &= \frac{1}{t}\left[f(x+t) - f(x) - f'(x)t\right] \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t \left[f'(x+\tau) - f'(x)\right] d\tau\end{aligned}$$

tomando límite cuando $t \to 0^+$ y el límite de la derecha de la igualdad es cero, entonces

$$\underset{t\to 0^+}{Lím} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = f'(x)$$

entonces

$$\underset{t\to 0^+}{Lím} A_t f(x) = f'(x)$$

Luego $f \in D(A)$ y así tenemos

$$D(A) = \{f \in C(\mathbb{R}) \ / \ existe\ f' \in C(\mathbb{R})\} = C'(\mathbb{R})$$

y además $Af = f'$

en este caso $D(A) \neq X$ pues $X = C(\mathbb{R})$.

3. Consideremos el semigrupo de contacciones de clase C_0 en $L^2(\mathbb{R}^n)$ del ejemplo anterior definido por:

$$\begin{array}{rcl} Z(t): \quad L^2(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^n) \\ f & \mapsto & Z(t)f = \begin{cases} f & ; t = 0 \\ K_t * f & ; t > 0 \end{cases} \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} K_t: \quad \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & K_t(x) = (4\pi t)^{\frac{-n}{2}} . e^{\dfrac{-|x|^2}{4t}} \end{array}$$

Ahora vamos a determinar el generador infinitesimal de Z.

Usaremos la transformada de Fourier con sus propiedades:

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{Z(t) - I}{t} \right) f - g \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \left\| F\left[\left(\frac{Z(t) - I}{t} \right) f - g \right] \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| F\left[\left(\frac{Z(t) - I}{t} \right) f \right] - F(g) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| F\left[\frac{Z(t)f - f}{t} \right] - F(g) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| F\left[\frac{K_t * f - f}{t} \right] - F(g) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| \frac{F(K_t * f) - F(f)}{t} - F(g) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| \frac{e^{-t|.|^2} F(f) - F(f)}{t} - F(g) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| \left(\frac{e^{-t|.|^2} - 1}{t} \right) F(f) - F(g) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

tomando límite cuando $t \to 0^{+}$ y aplicando L'Hospital tenemos

$Af = g$ si y solo si $-\left|x\right|^{2} F\left(f\right) = F\left(g\right)$

Además por una propiedad

$-\left|x\right|^{2} F\left(f\right) = F\left(\Delta f\right)$; donde Δ es el operador de Laplace en el sentido distribucional.

entonces

$$F\left(\Delta f\right) = F\left(g\right) \text{ por tanto } \Delta f = g$$

entonces concluímos que

$$D\left(A\right) = \left\{f \ / \ f \in L^{2}\left(\mathbb{R}^{n}\right) \quad \text{y} \quad \Delta f \in L^{2}\left(\mathbb{R}^{n}\right)\right\}$$

y

$$Af = \Delta f \quad ; \quad \forall f \in D\left(A\right)$$

4. Sea Z un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal.

   Pongamos $\tilde{Z}\left(t\right) = e^{-\lambda t} Z\left(t\right)$

   Veamos que $\tilde{Z}$ es un semigrupo de clase C_0 y que su generador infinitesimal es: $A - \lambda I$. En efecto

   (i) $\tilde{Z}\left(0\right) = e^{-\lambda 0}.Z\left(0\right) = I$

   (ii) $\tilde{Z}\left(s+t\right) = e^{-\lambda(s+t)} Z\left(s+t\right) = e^{-\lambda s - \lambda t} Z\left(s\right) Z\left(t\right)$

   $$= e^{-\lambda st} Z\left(s\right) e^{-\lambda t} Z\left(t\right) = \tilde{Z}\left(s\right) \tilde{Z}\left(t\right)$$

(iii) $\tilde{Z}(t) - I = e^{-\lambda t} Z(t) - I = e^{-\lambda t}(Z(t) - I) + \left(e^{-\lambda t} - 1\right) I$ entonces

$$\left\| \left(\tilde{Z}(t) - I\right) x \right\| \leq \left\| e^{-\lambda t}(Z(t) - I) x \right\| + \left\| \left(e^{-\lambda t} - 1\right) I \right\|$$

tomando límite cuando $t \to 0^+$ tenemos

$$\underset{t \to 0^+}{Lím} \left\| \left(\tilde{Z}(t) - I\right) x \right\| = 0 \quad ; \quad \forall x \in X$$

por tanto $\tilde{Z}$ es un semigrupo de clase C_0.

Además

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\tilde{Z}(t) - I}{t}\right) x &= \left(\frac{e^{-\lambda t} Z(t) - I}{t}\right) x \\
&= \left(\frac{e^{-\lambda t} Z(t) - e^{-\lambda t} I + e^{-\lambda t} I - I}{t}\right) x \\
&= \left(\frac{e^{-\lambda t}(Z(t) - I)}{t}\right) x + \left(\frac{e^{-\lambda t} I - I}{t}\right) x
\end{aligned}$$

tomando límite cuando $t \to 0^+$ y aplicando L'hospital

$$\begin{aligned}
\underset{t \to 0^+}{Lím} \left(\frac{\tilde{Z}(t) - I}{t}\right) x &= \underset{t \to 0^+}{Lím} \left(\frac{e^{-\lambda t}(Z(t) - I)}{t}\right) x + \underset{t \to 0^+}{Lím} \left(\frac{e^{-\lambda t} I - I}{t}\right) x \\
&= \underset{t \to 0^+}{Lím} e^{-\lambda t} . \underset{t \to 0^+}{Lím} \left(\frac{Z(t) - I}{t}\right) x + \underset{t \to 0^+}{Lím} \left(-\lambda e^{-\lambda t} I\right) x \\
&= 1 . \underset{t \to 0^+}{Lím} \left(\frac{Z(t) - I}{t}\right) - \lambda \underset{t \to 0^+}{Lím} e^{-\lambda t} I x \\
&= A - \lambda I
\end{aligned}$$

esto muestra que el generador infinitesimal $\tilde{A}$ de $\tilde{Z}$ está dado por

$$\tilde{A} = A - \lambda I$$

4. **Generación de Semigrupos**

Ya vimos que $\rho(A)$ es el conjunto resolvente del operador lineal A de X.

ie.

$$\rho(A) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{C} \ / \text{ existe } \ (\lambda I - A)^{-1} \ \text{ y es continuo además} \\ \\ D(\lambda I - A)^{-1} \ \text{ es denso en } X \end{array} \right\}$$

representamos $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ y es dicho el resolvente de A.

En el caso particular en que $X = \mathbb{C}$, todo operador A de X es de la forma $Ax = \alpha x$; donde $\alpha \in \mathbb{C}$.

En ese caso tenemos que

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - \alpha I)^{-1} = (\lambda - \alpha)^{-1}$$

Además de esto α es el generador infinitesimal del semigrupo $e^{t\alpha}$ y como podemos ver:

Si $\operatorname{Re}\lambda > \operatorname{Re}\alpha$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda t}.e^{\alpha t}dt &= \underset{h\to\infty}{Lím}\int_0^h e^{-\lambda t}.e^{\alpha t}dt = \underset{h\to\infty}{Lím}\int_0^h e^{(\alpha-\lambda)t}dt \\
&= \underset{h\to\infty}{Lím}\left[\frac{1}{\alpha-\lambda}e^{(\alpha-\lambda)t}\right]_0^h = \frac{1}{\alpha-\lambda}\underset{h\to\infty}{Lím}\left[e^{(\alpha-\lambda)h}-1\right] \\
&= \frac{1}{\alpha-\lambda}\underset{h\to\infty}{Lím}\left[e^{\operatorname{Re}(\alpha-\lambda)h+i\operatorname{Im}(\alpha-\lambda)h}-1\right] \\
&= \frac{1}{\alpha-\lambda}\underset{h\to\infty}{Lím}\left[e^{\operatorname{Re}(\alpha-\lambda)h}.e^{i\operatorname{Im}(\alpha-\lambda)h}-1\right]
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$e^{i\operatorname{Im}(\alpha-\lambda)h} = Cos\left(\operatorname{Im}(\alpha-\lambda)h\right) + iSen\left(\operatorname{Im}(\alpha-\lambda)h\right)$$

es acotado entonces

$$\underset{h\to\infty}{Lím}\left[e^{\mathrm{Re}(\alpha-\lambda)h}.e^{i\,\mathrm{Im}(\alpha-\lambda)h}\right]=0\text{ , pues }(\mathrm{Re}\,\lambda>\mathrm{Re}\,\alpha)$$

regresando al caso anterior

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}.e^{\alpha t}dt=\frac{1}{\lambda-\alpha}=R(\lambda,\alpha)$$

Por tanto, el resolvente del generador infinitesimal es la transformada de Laplace del semigrupo.

Estas consideraciones podemos extender fácilmente para los operadores $A\in\mathcal{L}(X)$, cualquiera sea el espacio de Banach X.

Teorema 2.2 *Sea Z un semigrupo de clase C_0 con generador infinitesimal A.*

Si $\mathrm{Re}\,\lambda>\omega_0$, *donde* $\omega_0=\underset{t\to\infty}{Lím}\dfrac{\log\|t\|}{t}$ *entonces*

$$\lambda\in\rho(A)\ \ y\ R(\lambda,A)\,x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}Z(t)\,dt\ ;\ \ \forall x\in X$$

Corolario 2.2 *Sea Z un semigrupo de clase C_0 con generador infinitesimal A.*

Si $\mathrm{Re}\,\lambda>\omega_0$; *donde* $\omega_0=\underset{t\to\infty}{lím}\dfrac{\log\|z(t)\|}{t}$ *entonces:*

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda,A)&=(-1)^n\,n!R(\lambda,A)^{n+1}\\\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda,A)\,x&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}(-t)^n\,Z(t)\,xdt,\quad\forall x\in X\end{aligned}$$

Teorema 2.3 ***(Hille - Yosida)*** *Para que un operador lineal A definido en $D(A)\subset X$ y con valores en X, sea el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0, es necesario y suficiente que:*

(i) *A sea cerrado y su dominio sea denso en* X

(ii) *Existan números reales* M *y* ω *tales que para cada* $\lambda > \omega$ *se tenga* $\lambda \in \rho(A)$ *y*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

en ese caso; $\|Z(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$.

Corolario 2.3 *Para que un opreador* A *sea generador infinitesimal de un semigrupo de clase* C_0 *tal que* $\|z(t)\| \leq e^{\omega t}$*;* $t \geq 0$ *es suficiente que* A *sea cerrado, su dominio sea denso y exista un número real* ω *tal que, si* $\lambda > \omega$ *entonces* $\lambda \in \rho(A)$ *y* $\|R(\lambda, A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda - w}$

Corolario 2.4 *Para que un operador* A *sea generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase* C_0 *es necesario y suficiente que* A *sea cerrado, su dominio denso,* $(0, \infty) \subset \rho(A)$ *y* $\forall \lambda > 0 : \|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$

Corolario 2.5 *Sea* Z *un semigrupo de clase* C_0 *y* A *su generador infinitesimal.*

Si $B_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$*;* $\lambda \geq \omega > \omega_0$ *entonces:*

$$Z(t)\,x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{t\beta_\lambda}.x$$

Notación. Para simplificar el lenguaje vamos a escribir $A \in G(M, \omega)$ para explicar que A es el generador infinitesimal de un grupo de operadores lineales acotados de clase C_0, Z, que satisface la condición

$$\|Z(t)\| \leq Me^{\omega t}\ ; \quad t \geq 0$$

Proposición 2.7 *$A - \omega \in G(M, 0)$ si y solo sí $A \in G(M, \omega)$*

Ahora veremos otra característica de los generadores infinitesimales de los semigrupos de contracciones lineales de clase C_0 debido a Lumer y Phillips. Recordemos algunos puntos:

Sea X un espacio de Banach, X^* el dual de X y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualidad entre X y X^*. Pongamos para cada $x \in X$

$$J(x) = \left\{ x^* \in X^* \ / \ \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \right\}$$

Por el teorema de Hahn-Banach, $J(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in X$.

Una aplicación dualidad es una aplicación $j : X \to X^*$ tal que $j(x) \in J(x)$ $\forall x \in X$ entonces $\|j(x)\| = \|x\|$.

Definición 2.5 *Un operador lineal $A : X \to X$ es dicho disipativo relativamente a una aplicación dualidad, j si*

$$\operatorname{Re} \langle Ax, j(x) \rangle \leq 0; \quad \forall x \in D(A)$$

Proposición 2.8 *Si A fuera disipativo relativamente a alguna aplicación dualidad entonces*

$$\|(\lambda - A) x\| \geq \lambda \|x\|; \quad \forall \lambda > 0 \ \text{ y } \ \forall x \in D(A)$$

Teorema 2.4 *(Lumer-Phillips) Si $A \in G(1, 0)$ entonces:*

(i) A es disipativo realtivamente a cualquier aplicación dualidad.

(ii) $\operatorname{Im}(\lambda I - 1) = X, \quad \forall \lambda > 0$

Reciprocamente, si:

(iii) $D(A)$ *es denso en* X

(iv) A *es disipativo realtivamente a alguna aplicación dualidad*

(v) $\operatorname{Im}(\lambda_0 I - A)$, *para algún* $\lambda_0 > 0$ *entonces* $A \in G(1, 0)$.

Ejemplos

1. Consideremos el semigrupo traslación sobre $X = C[0,\infty]$ donde

$$(Z(t)f)(x) = f(x+t)$$

es una contracción con $M = 1$, $w = 0$ y con su generador infinitesimal A tal que :$Af = f'$ estos argumentos ya fueron probados anteriormente.

Comprobaremos el teorema de Hille Yosida para este semigrupo.

Para $\lambda > 0$ $(= w)$ consideremos la ecuación

$$(\lambda I - A)f = g \qquad \text{i.e} \qquad \lambda f - f' = g$$

donde $g \in C[0,\infty]$ y mostremos $f \in D(A)$.

Usando las técnicas de integración

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-\lambda x}f(x)\right] = -e^{\lambda x}g(x) \;\; ; \;\; x \geq 0$$

Integramos de x hasta T (fijamos $T > x$) y obtendremos

$$e^{-\lambda T}f(T) - e^{-\lambda x}f(x) = -\int_x^T e^{-\lambda y}g(y)\,dy$$

cuando $T \to \infty$, $f(T)$ tiende hacia un límite finito (desde que $f \in D(A)$) y $e^{-\lambda T} \to 0$ $(\lambda > 0)$.

Tomando límite $T \to \infty$ tenemos

$$f(x) = \int_x^\infty \exp\left[\lambda(x-y)\right]g(y)\,dy$$

ahora probaremos que $f \in D(A)$. En particular probaremos que $f(x)$ tiende a un límite finito cuando $x \to \infty$.

Podemos ver esto escribiendo la integral de la derecha como:

$$f(x) = \frac{\int_x^\infty \exp(-\lambda y)\, g(y)\, dy}{\exp(-\lambda x)}$$

Usando L'Hospital tenemos

$$\underset{x\to\infty}{Lím} \frac{-\exp(-\lambda x)\, g(x)}{-\lambda \exp(-\lambda x)} = \frac{1}{\lambda} \underset{x\to\infty}{Lím}\, g(x) < \infty$$

pues $g \in C[0,\infty]$

entonces $f(x)$ tiende a un límite finito cuando $x \to \infty$.

Además; derivamos f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\exp(\lambda x) \int_x^\infty \exp(-\lambda y)\, g(y)\, dy\right] \\ &= \frac{d}{dx}\exp(\lambda x) \int_x^\infty \exp(-\lambda y)\, g(y)\, dy + \exp(\lambda x)\frac{d}{dx}\int_x^\infty \exp(-\lambda y)\, g(y)\, dy \\ &= \lambda \exp(\lambda x) \int_x^\infty \exp(-\lambda y)\, g(y)\, dy + \exp(\lambda x)\exp(-\lambda x)\, g(x) \\ &= g(x) + \lambda \int_x^\infty \exp(\lambda x - \lambda y)\, g(y)\, dy \end{aligned}$$

Se observa que $f \in C'[0,\infty]$.

por tanto $f \in D(A)$

Ahora observemos que:

$$f = [\lambda I - A]^{-1} g = R(\lambda, A)\, g$$

entonces:

$$\begin{aligned}
(R(\lambda, A)\, g)(x) &= \int_x^\infty \exp[\lambda(x-y)]\, g(y)\, dy \quad ; \quad x \geq 0 \\
|(R(\lambda, A)\, g)(x)| &\leq \int_x^\infty \exp[\lambda(x-y)]\, \|g\|_\infty\, dy \\
&= \|g\|_\infty \int_x^\infty \exp[\lambda(x-y)]\, dy \\
&= \|g\|_\infty \left[-\lambda^{-1} \exp[\lambda(x-y)]\right]_{y=x}^{y=\infty} \\
&= \lambda^{-1} \|g\|_\infty
\end{aligned}$$

como $\lambda > 0$:

$$\|R(\lambda, A)\, g\|_\infty \leq \lambda^{-1} \|g\|_\infty$$

entonces:

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad \text{para } \lambda > 0$$

Luego

$$\|[R(\lambda, A)]^n\| \leq \frac{1}{\lambda^n} \quad ; \quad \text{para } \lambda > 0 \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

lo que verifica Hille Yosida con $M = 1$ y $w = 0$