CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1. **Operadores lineales Acotados.**

Sean X e Y dos espacios de Banach ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$)

$$\mathcal{L}(X,Y) = \{A : X \to Y \ \ / \ \ A \text{ es un operador lineal y acotado}\}$$

donde:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| < +\infty \ \ (\text{norma en } \mathcal{L}(X,Y)).$$

$(\mathcal{L}(X,Y), \| \ \|)$ con esta norma es un espacio de Banach.

En el caso en que $Y = X$ escribiremos $\mathcal{L}(X)$ en vez de $\mathcal{L}(X,X)$.

Si A, $B \in \mathcal{L}(X)$, el producto de A con B es definido por: $AB = A \circ B$.

donde $A \circ B$ es la transformación compuesta de A y B.

Con esta estructura $\mathcal{L}(X)$ es un álgebra, donde

$$\text{si} \quad A, B \in \mathcal{L}(X) \ \text{ vemos que } AB \in \mathcal{L}(X) \quad \text{y} \quad \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \tag{1.1}$$

i.e. $\mathcal{L}(X)$ es un álgebra de Banach.

Sea la sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(X)$, se dice que es convergente si existe $A \in \mathcal{L}(X)$ tal que

$$\|A_n - A\| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty \tag{1.2}$$

Se denota con $A_n \to A$; cuando $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

Además como $\mathcal{L}(X)$ es un espacio de Banach entonces $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente si y solo sí $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

2. **Función Exponencial.** Sabemos que si $x \in \mathbb{R}$, la función exponencial es definida por

$$e^{tx} = 1 + \frac{tx}{1!} + \frac{t^2x^2}{2!} + \cdots + \frac{t^nx^n}{n!} + \cdots$$

De este modo si consideramos ahora $A \in \mathcal{L}(X)$, la serie

$$1 + \frac{|t|\,\|A\|}{1!} + \frac{|t|^2\,\|A\|^2}{2!} + \cdots + \frac{|t|^n\,\|A\|^n}{n!} + \cdots$$

es convergente, teniendo en cuenta (1.1) la serie:

$$I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \cdots + \frac{t^nA^n}{n!} + \cdots$$

donde I es el operador identidad de X, es absolutamente convergente, por tanto es convergente $\forall t \in \mathbb{R}$.

Por tanto, queda definida una función llamada también "función exponencial" designada por e^{tA}. Si consideramos $(tA)^0 = I$ se tiene que:

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^nA^n}{n!}$$

Observemos que $e^{tA} \in \mathcal{L}(X)$ y $\left\|e^{tA}\right\| \leq e^{|t|\|A\|}$

3. Derivación de Funciones Vectoriales

- Sea $f : (a,b) \to X$ una función definida en el intervalo (a,b) y con valores en el espacio de Banach X. Se dice que f es diferenciable en el punto $t_0 \in (a,b)$ si existe en X el límite

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

  el cual es denotado por $f'(t_0)$ y es llamado derivada de f en el punto t_0.

- Se dice que f es diferenciable en $\Omega \subset (a,b)$ si f es diferenciable en todo punto de Ω.

Son válidas para la diferenciación de las funciones vectoriales las reglas siguientes:

i) Si f es diferenciable en el punto t_0 entonces

$$f(t) - f(t_0) = (t - t_0) f'(t_0) + \alpha(t, t_0)$$

donde

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\alpha(t, t_0)}{t - t_0} = 0$$

En particular, si f es diferenciable en el punto t_0 entonces f es contínua en ese punto.

ii) Si $f(t) = x_0, \ \forall t \in (a,b)$; donde $x_0 \in X$, entonces f es diferenciable en todo punto de (a,b) y además

$$f'(t) = 0; \ \forall t \in (a,b)$$

Recíprocamente:

Si $f'(t) = 0$ en todo punto de (a,b), entonces f es una constante en (a,b).

iii) Si f y g diferenciables en el punto t_0 entonces $f+g$ es diferenciable en t_0 y además $(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$

iv) Si γ es una función numérica definida en (a,b) y diferenciable en el punto t_0, entonces γf es diferenciable en t_0 y además

$$(\gamma f)'(t_0) = \gamma'(t_0) f(t_0) + \gamma(t_0) f'(t_0)$$

Observación: Las reglas *i*), *ii*), *iii*), *iv*) son válidas para el álgebra de Banach $\mathcal{L}(X)$.

Teorema 1.1 *Si f y g son dos funciones definidas en (a,b) con valores en $\mathcal{L}(X)$ y diferenciable en un punto $t_0 \in (a,b)$ entonces fg es diferenciable en el punto t_0 y además*

$$(fg)'(t_0) = f'(t_0) g(t_0) + f(t_0) g'(t_0)$$

4.- **Integración de Funciones Vectoriales**

Sea $f : [a,b] \to X$, una función contínua, con X de Banach.

Dada una descomposición π de $[a,b]$.

es decir existen $n+1$ números reales $t_0, t_1, \ldots, t_n$ satisfaciendo la condición

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

y n números reales ξ_i , $i = 1, \ldots, n$; $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$, queda definida una suma de Riemann de f :

$$\sigma_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

Evidentemente $\sigma_\pi(f) \in X$

Sea $|\pi| = \text{máx}_{1\leq i\leq n}\{t_i - t_{i-1}\}$ entonces $\sigma_\pi(f)$ tiene un límite $x \in X$ cuando $|\pi| \to 0$.

De modo más preciso: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|\sigma_\pi(f) - x\| < \varepsilon \ ; \quad \forall \pi \text{ tal que } |\pi| < \delta$$

- Se dice que x es la integral de f en $[a,b]$ y se escribe:

$$x = \lim_{|\pi|\to 0} \sigma_\pi(f) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Son válidas para la integral de las funciones vectoriales las reglas siguientes:

$i)$ Si k es una constante

$$\int_a^b kf(t)\,dt = k\int_a^b f(t)\,dt$$

$ii)$ $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$

iii) Si $a \leq c \leq b$ entonces

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

iv) $\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt$

v) $\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \text{máx}_{a \leq t \leq b} \|f(t)\| (b-a)$

Teorema 1.2 ***Teorema de la media*** *Si f es una función en las condicones anteriores entonces*

$$\int_a^b f(t)\,dt = (b-a)\,\bar{x}$$

donde: $\bar{x} \in \overline{conv\ f(a,b)}$ (cerradura del conjunto de las combinaciones convexas de los elementos del conjunto $f(a,b)$)

Corolario 1.1 *Para todo $t \in [a,b]$ se tiene*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(\tau)\,d\tau = f(t)$$

Observación: (Teorema Fundamental del cálculo para Funciones Vectoriales)

Si F es diferenciable en $[a,b]$ y $F'(t) = f(t)$, $t \in [a,b]$ entonces

$$\int_a^t f(\tau)\,d\tau = F(t) - F(a)$$

Recuerde que un operador A, con dominio $D(A) \subset X$ y valores en Y (X e Y espacios de Banach) es llamado cerrado si su gráfico

$$\{(x, Ax)\ /\ x \in D(A)\}$$

es un subespacio cerrado de $X \times Y$.

Equivalentemente podemos decir

Si $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$ y $Ax_n \to y$ entonces $x \in D(A)$ y $Ax = y$

Todo operador lineal acotado $A : D(A) = X \to Y$ es cerrado. Reciprocamente. Si A es cerrado y $D(A) = X$ entonces A es contínuo

Teorema 1.3 *Sea $A : D(A) \to X$; $D(A) \subset X$ un operador lineal y cerrado, $f : [a, b] \to D(A)$ una función contínua y tal que Af es contínua en $[a, b]$. Entonces*

$$\int_a^b f(t)\,dt \in D(A) \;\; \text{y además: } \; A\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b Af(t)\,dt$$

5.- **Integrales Impropias**

Si $f : [a, \infty) \to X$, se define

$$\int_a^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{\xi \to \infty} \int_a^{\xi} f(t)\,dt$$

cuando el límite existe. En ese caso se dice que la integral $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ es convergente.

Se dice que es absolutamente convergente si existe el límite

$$\lim_{\xi \to \infty} \int_a^{\xi} \|f(t)\|\,dt$$

Toda integral absolutamente convergente es convergente.

Teorema 1.4 ***(Teorema de Weierstrass)*** *Sea $f : [a, \infty) \times [\alpha_0, \alpha_1] \to X$ contínua en $t \in [a, \infty)$ para cada $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ y $M : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ contínua y positiva para $t \in [a, \infty)$.*

Si $\|f(t, x)\| \leq M(t)$; $\forall (t, \alpha) \in [a, \infty) \times [\alpha_0, \alpha_1]$ y $\displaystyle\int_a^{\infty} M(t)\, dt$ converge. Entonces $\displaystyle\int_a^{\infty} f(t, \alpha)\, dt$ converge absolutamente para cada $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ y la converegencia es uniforme en dicho intervalo.

Teorema 1.5 *Si f y $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$ son contínuas para $(t, \alpha) \in [a, \infty) \times [\alpha_0, \alpha_1]$; $\displaystyle\int_a^{\infty} f(t, \alpha)\, dt$ es convergente para cada $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ y $\int_a^{\infty} \dfrac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha} dt$ es uniformemente convergente en $[\alpha_0, \alpha_1]$. Entonces*

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^{\infty} f(t, \alpha)\, dt = \int_a^{\infty} \frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha} dt$$

6.- Resolvente de un Operador

Sea A un operador lineal en X. El conjunto de los $\lambda \in \mathbb{C}$, para los cuales el operador lineal $\lambda I - A$ es inversible y su inverso es acotado y tiene dominio denso en X, es llamado conjunto resolvente de A y se representa por $\rho(A)$.

El conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ es llamado espectro de A.

Representamos por $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$, es llamado resolvente de A.

Observación: Cuando el operador lineal A es cerrado, $R(\lambda, A)$ es también cerrado; luego $\forall\ \lambda \in \rho(A)$, $R(\lambda, A)$ es un operador lineal acotado y cerrado en un conjunto denso en X, entonces su dominio es X.

Teorema 1.6 *Sea A un operador en X lineal y cerrado. Si $\lambda,\mu \in \rho(A)$ entonces*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A)$$

7.- Convergencia Uniforme, Convergencia Fuerte y Convergencia Débil

Sea una sucesión de funciones $(A_n)_n \subseteq \mathcal{L}(X)$ converge uniformemente para $A \in \mathcal{L}(X)$ si $\|A_n - A\| \to 0$; cuando $n \to \infty$.

- La convergencia es fuerte si: $\|A_n x - Ax\| \to 0, \ \forall x \in X$ cuando $n \to \infty$
- La convergencia es debíl si:$\langle (A_n - A) x, x^* \rangle \to 0 : \forall x \in X \wedge \forall x^* \in X^*$ el dual de X cuando $n \to \infty$.

Observación.

i) La convergencia uniforme implica la convergencia fuerte

ii) La convergencia fuerte implica la convergencia débil.