UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Fundada en 1551

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
E.A.P. DE FÍSICA

"APLICACIÓN DE LAS FUNCIONES DE GREEN EN PROBLEMAS DE LA FÍSICA - MATEMÁTICA"

MONOGRAFÍA

Para optar el Título Profesional de:

LICENCIADO EN FÍSICA

AUTOR

ABEL ROLANDO JULCA QUISPE

LIMA – PERÚ
2005

AGRADECIMIENTOS

Esta monografía técnica elemento para optar el titulo profesional de Física de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (Facultad de Ciencias Físicas) ha sido posible gracias a la asesoría del Profesor MsC. Régulo Ángel Sabrera Alvarado.

Agradecimiento especial debo expresar a mi familia en especial a mi señora madre y a mis hermanos Vilma y Ruben por su apoyo y comprensión para hacer posible la culminación de mi carrera.

También, debo expresar mi agradecimiento a los profesores, compañeros y amigos de la Facultad por su apoyo solidario y franca amistad.

DEDICATORIA

A mi familia, madre y hermanos por el ejemplo de vida

INDICE

RESUMEN

En la presente monografía se exponen sucintamente la teoría de las Funciones de Green y algunas aplicaciones en la física - matemática, específicamente en problemas de Mecánica y Electromagnetismo; Por ejemplo en electromagnetismo se le ha aplicado para hallar potenciales asociados a situaciones gobernadas por la ecuación de Laplace bajo condiciones de contorno, en Mecánica para hallar el movimiento del oscilador armónico forzado, entre otros.

Desde su aparición en 1825, la función de Green se ha convertido en una herramienta alternativa para abordar problemas con ecuaciones diferenciales no homogéneas bajo ciertas condiciones de contorno; esta técnica ha demostrado ser útil en diversas áreas de la física clásica. Asimismo, gracias a los trabajos de George Green – su creador - , es que fue posible transformar los problemas con valores en la frontera en forma de ecuaciones diferenciales a ecuaciones integrales utilizando funciones kernels de integración conocidas ahora como funciones de Green.

La importancia del método de las funciones de Green radica en su simplicidad para aplicarse en sistemas físicos gobernados por ecuaciones diferenciales pero esto requiere a la par una fuerte dosis de habilidad matemática.

La utilidad de este método ya hemos dicho se concentra en el campo de las ciencias como física, matemática, etc., pero también en ingeniería, área en donde las funciones de Green se conocen mas bien con el nombre de función Respuesta impulso correspondiente a una entrada del tipo delta; Una vez hallada la respuesta impulso de un sistema, la respuesta del sistema a cualquier entrada puede obtenerse a través de la convolución de la respuesta impulso del sistema con la función entrada en el dominio del tiempo [1].

El tema de las funciones de Green y sus aplicaciones en el campo de la ciencia y tecnología es un tema permanente de investigación, pero esto requiere gran capacidad matemática y sólidos conocimientos de los fundamentos físicos del problema que se desee abordar.

I. INTRODUCCIÓN

Las funciones de Green, se han constituido desde su aparición en 1825 en una poderosa herramienta de la física matemática para resolver los problemas de la electrostática en principio, hasta abordar complejos temas de la materia condensada en la actualidad.

Estas funciones deben su nombre a los trabajos del matemático ingles George Green a inicios del siglo XIX, fue el quien transformo los problemas con valores en la frontera en forma de ecuaciones diferenciales a ecuaciones integrales utilizando funciones kernels de integración conocidas ahora como funciones de Green [2]. Posteriormente y gracias a los trabajos del físico británico Paul Dirac por medio de su conocida función delta, los adelantos en esta técnica han beneficiado no solo a la física y matemática sino a la ciencia e ingeniería en general.

El concepto de función de Green es importante para resolver sistemas físicos de la naturaleza que pueden ser expresados mediante ecuaciones matemáticas de tipo lineal.

Así por ejemplo, en electromagnetismo, una función Green representa la respuesta de campo debida a una fuente de carga puntual ubicada a distancia; en elastodinámica viene a representar el campo desplazamiento debida a una fuerza impulsiva puntual y en teoría de señales en ingeniería eléctrica representa la respuesta de un sistema lineal ante una entrada impulsiva tipo delta, conociéndose mas bien como la respuesta impulso del sistema.

En la actualidad, las funciones de Green se han convertido elemento de investigación para descifrar nuevas propiedades de los materiales estudiándolos a nivel cuántico.

Por su versatilidad, sencillez y gran rango de aplicaciones – desde sistemas tan grandes como la Tierra hasta las moléculas – el tema de las funciones de Green será motivo de permanente aplicación en la física y ciencia en general.

II. FUNDAMENTO TEORICO

2.1. Introducción

Las funciones de Green, deben su nombre gracias a los trabajos en Electrostática del matemático ingles George Green a inicios del siglo XIX. Green transformó las ecuaciones diferenciales del electromagnetismo en ecuaciones integrales a través de funciones kernels de integración denominadas funciones Green. Así la función potencial de Coulomb, es la función Green de la ecuación de Poisson.

Históricamente el método de las funciones de Green se deriva de una generalización del teorema de la divergencia.

$$\int_V \nabla \cdot A(x')dV' = \oint_S A(x') \cdot da'$$

siendo S superficie externa del volumen V.

Haciendo $A(x) = f(x)\nabla y(x)$ en la expresión anterior, se llega a la expresión original derivada por Green:

$$\int_V \left[f\nabla^2 y - y\nabla^2 f \right] dV' = \oint_S \left[f\frac{\partial y}{\partial n} - y\frac{\partial f}{\partial n} \right] da'$$

siendo, n la normal exterior a la superficie S

A primera impresión esta expresión no parece ser de mucha utilidad, pero si se elige y tal que $\nabla^2 y = d(x - x_0)$ x_0: punto al interior de V y considerando a la función f tal que satisface la ecuación de Poisson,

$$\left(\nabla^2 f(x') = -\frac{r(x')}{e_0}\right)$$

Tenemos que:

$$f(x_0) = -\frac{1}{e_0}\int_V y_{x_0}(x')\, r(x')dV' + \oint_S \left[f(x')\frac{\partial y_{x_0}}{\partial n}\bigg|_{x'} - y_{x_0}(x')\frac{\partial f}{\partial n}\bigg|_{x'} \right] da'$$

Esta ecuación permite calcular el potencial en x_0, conociendo ñ en V y ö/ n en la frontera; esto ultimo no siempre es posible presentándose los siguientes casos:

- o Si se conoce ö pero no ö/ n en la frontera (Condiciones de contorno de Dirichlet), entonces se elige ø de modo que ø = 0 sobre la frontera

$$f(x_0) = -\frac{1}{e_0}\int_V y_{x_0}(x')\, r(x')\, dV' + \oint_S f(x') \frac{\partial y_{x_0}}{\partial n}\bigg|_{x'} da'$$

- o Si se conoce ö/ n pero no ö sobre la frontera (condiciones de conto rno de Neumann) se elige ø de modo que ø/ n = 0 sobre la frontera

$$f(x_0) = -\frac{1}{e_0}\int_V y_{x_0}(x')\, r(x')\, dV' - \oint_S y_{x_0}(x') \frac{\partial f}{\partial n}\bigg|_{x'} da'$$

2.2. Nociones básicas

Desde su introducción en 1828, las funciones de Green se han constituido en una importante herramienta matemática para la solución de problemas con valores en la frontera, representando ser además un elemento clave en el desarrollo de métodos de ecuaciones integrales con condiciones de contorno.

Una función Green es un kernel de integración que puede emplearse para resolver una ecuación diferencial in homogénea lineal ordinaria o parcial sujeto a ciertas condiciones de contorno.

Primeramente se hace una breve descripción de términos elementales con que se trabajará.

Ecuación diferencial: Las ecuaciones diferenciales son modelos matemáticos que representan sistemas físicos de la naturaleza.

Ecuación diferencial lineal: En especial las ecuaciones diferenciales lineales (ordinarias o parciales) representan sistemas reales asociados a problemas prácticos no solo de la física sino de la ciencia e ingeniería en general.

Una ecuación diferencial de segundo orden (en general de orden "n") se dice que es lineal si en la ecuación: $u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x)$

es lineal la función desconocida ***u*** *así como sus derivadas* ***u'***, ***u''***

las funciones p, q , f son conocidas funciones de variable ***x***

Si f(x) = 0 para todo x del intervalo dominio, la ecuación se llama ***homogénea***

Si f(x) 0 " " " " la ecuación se llama ***no homogénea***

f(x) se denomina también "entrada"

u(x) se denomina respuesta a la entrada incluida las condiciones iniciales o "salida"

Figura 1. Diagrama de entrada y salida sobre un sistema

Por ejemplo, si f(x) representa una fuerza mecánica o eléctrica, entonces y(x) viene a resultar un desplazamiento o una corriente respectivamente.

La solución general viene dada por: $u = u_h + u_p$

Donde:

u_h *: es la solución de la correspondiente ecuación homogénea llamada también solución transitoria*

u_p *: es una solución particular de la ecuación no homogénea llamada también solución permanente*

Ecuación diferencial lineal ordinaria: Ecuación que contiene una o mas derivadas de una función desconocida supongamos u(x), x: variable independiente

Ecuación diferencial lineal parcial:

Ecuación que involucra a una función desconocida de dos o mas variables u(x,y), así como de sus derivadas parciales

2.3. Ecuaciones mediante operadores.

Considérese una ecuación diferencial lineal expresada en la forma general

$$L(x)u(x) = f(x) \qquad (1)$$

donde L(x) es un operador diferencial auto-adjunto, *u(x)* es una función desconocida, *f(x)* es una función conocida llamado también el termino no-homogéneo. Operacionalmente, la solución a la ecuación (1) es:

$$u(x) = L(x)^{-1} f(x) \qquad (2)$$

donde L^{-1} representa el inverso del operador diferencial L. Puesto que L es un operador diferencial, es razonable esperar que su inversa tenga la forma de un operador integral, así como las propiedades usuales,

$$LL^{-1} = L^{-1}L = I \qquad (3)$$

donde *I* es el operador *identidad*. Mas específicamente, definiremos el operador inverso como:

$$L^{-1} f = \int G(x;x') f(x') dx' \qquad (4)$$

donde el kernel *G(x;x')* es la *Función Green* asociada al operador diferencial *L*[3]. Nótese que *G(x;x')* es una función bidimensional que depende tanto de x como x'. Para completar la idea del operador inverso L^{-1}, se introduce la función delta de Dirac como el operador identidad *I*. Recordar las propiedades de la función impulso unitario o delta de Dirac ä(x) a continuación:

$$ä(x) = \begin{cases} 0, & x \quad 0 \\ , & x = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{d}(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\boldsymbol{d}(x)dx = f(0)$$

Figura 2. Función impulso unitario o “función delta”

La función de Green *G(x;x')* luego entonces satisface

$$L(x)G(x;x') = ä(x-x') \qquad (6)$$

La solución a la ecuación (1) puede después expresarse en términos de la función de Green como a continuación $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x;x')\, f(x')dx'$ (7)

2.4 Definición

Una función de Green viene a ser el kernel de integración asociado al operador diferencial L en ecuaciones no homogéneas con determinadas condiciones de contorno.

Dado L(x)u(x) = f(x), L: operador diferencial auto-adjunto y lineal, entonces

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x;x')\, f(x')dx'$$

en donde G satisface: $L(x)G(x;x') = ä(x-x')$

La ventaja de esta formulación del problema, radica en que la función Green es independiente de f(x), esto es, solo depende de la forma de la ecuación diferencial y de sus condiciones iniciales o de frontera[4].

Fácilmente se prueba que la ecuación (7) representa la solución a la ecuación (1), realizando la siguiente sustitución como sigue:

$$
\begin{aligned}
Lu(x) &= L\int_{-\infty}^{\infty} G(x;x') f(x')dx' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} LG(x;x') f(x')dx' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{d}(x-x') f(x')dx' \\
&= f(x)
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

Nótese que se han empleado las propiedades de linealidad en operadores diferenciales y sus inversos correspondientes en adición a las ecuaciones (4), (5), y (6) para obtener esta simple demostración.

2.5 Propiedades

1. Las funciones de Green satisfacen la ecuación diferencial homogénea - asociada
   al problema inhomogeneo inicial – en todo el dominio excepto en x = x’
   L(x)G(x;x’)=0
2. La función de Green es continua en x = x’
   Lim G(x;x’)= Lim G(x;x’)
   x’ x^- x’ x^+
3. La derivada de la función de Green es discontinua en x = x’
   G’(x;x^+) – G’(x;x^-) = - 1
4. La función de Green satisface las condiciones de contorno del problema
5. La función de Green es simétrica en los dos argumentos G(x;x’)= G(x’;x)

2.6 Significado físico

Las funciones Green pueden admitir interpretaciones físicas para una variedad de operadores diferenciales que se encuentra en la física matemática.

De la física básica, se sabe que la función de Green expresa el potencial en un punto x debida a una carga puntual ubicada en x' la fuente puntual [5] . Así la función Green depende exclusivamente de la distancia entre la fuente origen y punto de calculo. Otras interpretaciones físicas de la función de Green pueden también admitirse. En elastoestatica, la función Green viene a representar el desplazamiento en el sólido debida a la aplicación de una fuerza unitaria en otro punto origen [6]. En termodinámica, la función Green representa la temperatura en un punto de observación debida a una fuente unitaria de calor aplicada en el punto de ubicación de la fuente. En general, viene a representar la respuesta de un sistema lineal ante una entrada impulsiva tipo delta, conocida también en Ingeniería como la respuesta impulso del sistema.

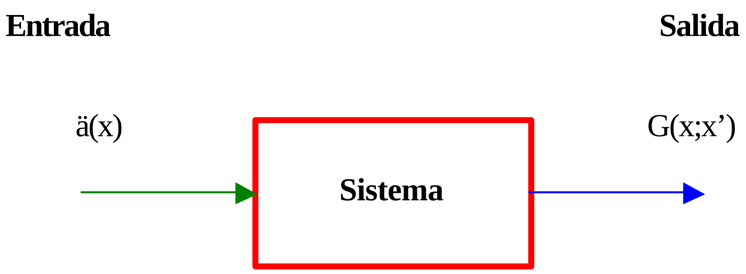

Figura 3. Representación general de una Función de Green G(x;x') de un sistema

III. APLICACIONES EN FÍSICA-MATEMÁTICA

3.1 Electrostática

Una manera de resolver los problemas de contorno en electrostática es a través de las funciones de Green, denominándosele función de la fuente.

3.1.1 Ecuación de Poisson

En presencia de las cargas del potencial electroestático ø satisface la ecuación no homogénea de Poisson

$$\nabla^2 y = -\frac{r}{e_0}$$

mientras que la función ö, que puede designarse como la función de Green, debe satisfacer la ecuación de Poisson con una fuente de punto en el punto definido por r_2:

$$\nabla^2 j = -d(r_1 - r_2)$$

Siendo así, físicamenteö es el potencial en r_1 correspondiente a la fuente unitaria(å$_0$) en r_2.

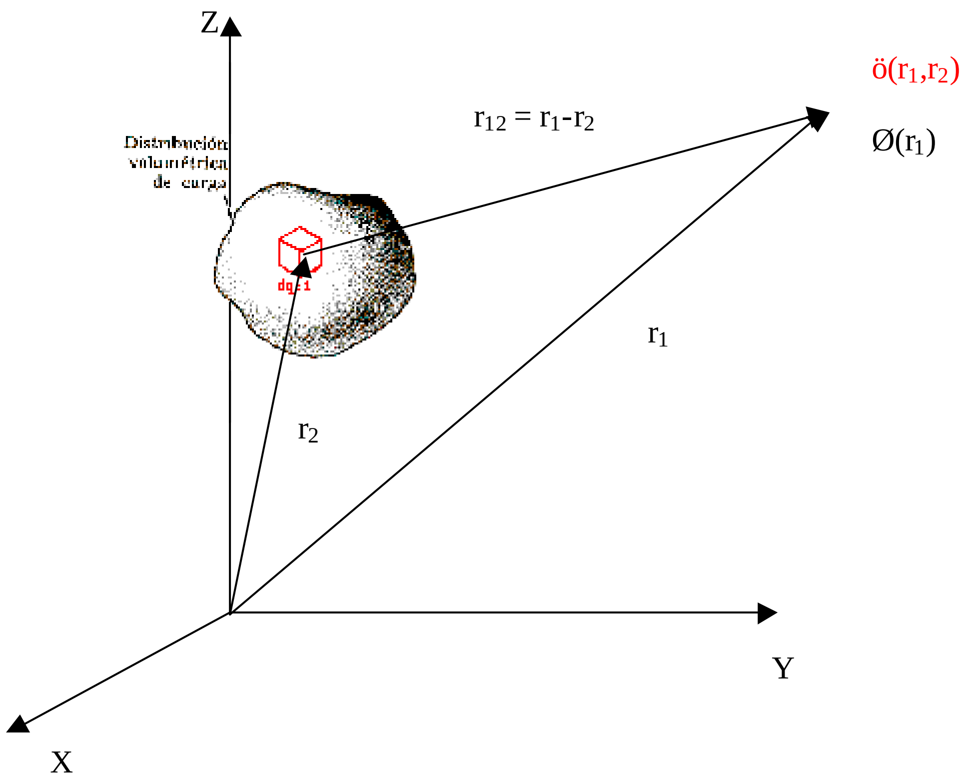

Figura 4. Función de Green como fuente de punto unitario

Mediante el teorema de Green

$$\int (y\nabla^2 \boldsymbol{j} - \boldsymbol{j}\nabla^2 y)\, d\boldsymbol{t}_2 = \int (y\nabla \boldsymbol{j} - \boldsymbol{j}\nabla y)\cdot d\boldsymbol{o}$$

Suponiendo que el integrando disminuye con mayor rapidez que r^{-2}, se puede simplificar el problema al considerar un volumen tan grande que la integral de superficie desaparece, dejando así

$$\int \boldsymbol{y}\nabla^2 \boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{t}_2 = \int \boldsymbol{j}\nabla^2 \boldsymbol{y}\, d\boldsymbol{t}_2$$

$$-\int \boldsymbol{y}(r_2)\boldsymbol{d}(r_1 - r_2)\, d\boldsymbol{t}_2 = -\int \frac{\boldsymbol{j}(r_1, r_2)\, \boldsymbol{r}(r_2)}{\boldsymbol{e}_0}\, d\boldsymbol{t}_2$$

$$\boldsymbol{y}(r_1) = \frac{1}{\boldsymbol{e}_0}\int \boldsymbol{j}(r_1, r_2)\, \boldsymbol{r}(r_2)\, d\boldsymbol{t}_2$$

De otro lado:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{4\boldsymbol{p}r}\right) = -\boldsymbol{d}(r)$$

En consecuencia, la función ö (función de Green) esta definida por

$$\boldsymbol{j}(r_1, r_2) = \frac{1}{4\boldsymbol{p}\left|r_1 - r_2\right|}$$

Luego, la solución de nuestra ecuación diferencial (Ecuación de Poisson) es

$$\boldsymbol{y}(r_1) = \frac{1}{4\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_0}\int \frac{\boldsymbol{r}(r_2)}{\left|r_1 - r_2\right|}\, d\boldsymbol{t}_2$$

En resumen, la función de Green, proporciona el efecto de una fuente de punto unitario en r_2 que produce el potencial en r_1.

3.1.2 El problema de Laplace

Para toda función u, continua conjuntamente con sus derivadas primeras en un volumen T, delimitada por una superficie S suficientemente suave y que tenga derivadas segundas dentro de T, se halla que[7]:

$$u(M_0) = \iint_{\Sigma}\left[G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right] d\boldsymbol{s} - \iiint_{T} \nabla^2 u \cdot G\, d\boldsymbol{t}$$

Con: $$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}+v$$

representa el potencial en el punto M debida a una carga puntual ubicada en M_0 dentro de una superficie conductora , conectada a tierra. 1/4ðR es el potencial de la carga puntual en el espacio libre, en tanto v indica el potencial del campo de las cargas inducidas en la superficie conductora [7].

Así, la solución para el problema contorno del tipo Dirichlet con ∇^2 u = 0, es:

$$u(M_0)=-\iint_{\Sigma} u\frac{\partial G}{\partial n}d\sigma=-\iint_{\Sigma} f\frac{\partial G}{\partial n}d\sigma \quad (f=u\,|_{\Sigma})$$

Como aplicación se trata el problema de Laplace para una región de semiespacio no acotado, es decir, hallar la función de la fuente para el semiespacio z > 0.

Ubiquemos en $M_0(x_0,y_0,z_0)$ una carga unitaria, que crea en el espacio no acotado un campo, cuyo potencial se determina por la función $\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{M_0M}}$

Donde: $R_{M_0M}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$

Se desprende fácilmente que el "campo inducido" v es el campo de una carga unitaria negativa, ubicada en el punto $M_1(x_0,y_0,-z_0)$, que es la imagen especular del punto M_0 en el plano z = 0 (Figura 5)

La función G, igual a $$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi R_0}-\frac{1}{4\pi R_1}$$

donde:

$$R_0=|M_0M|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

$$R_1=|M_1M|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}$$

Se anula para z = 0 y tiene la singularidad en el punto M_0

Calculemos $\dfrac{\partial G}{\partial n}\Big|_{z=0} = -\dfrac{\partial G}{\partial z}\Big|_{z=0}$. Es evidente que

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{z-z_0}{R_0^3} + \frac{z+z_0}{R_1^3}\right]$$

Haciendo z = 0, se halla que:

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{z=0} = -\frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\frac{z_0}{2\pi R_0^3}$$

Luego, la solución al problema de Laplace con condición de Dirichlet se da por la formula:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\Sigma_0} \frac{z_0}{R_{M_0P}^3} f(P)\, d\sigma_P$$

donde ${}_0$ es el plano z = 0, $f(P) = u\,\big|_{z=0}$, o bien

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_0}{\left|(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2\right|^{3/2}} f(x,y)\,dxdy$$

Donde:

$$G(M;M_0) = \frac{1}{2\pi}\frac{z_0}{\left|(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2\right|^{3/2}}$$

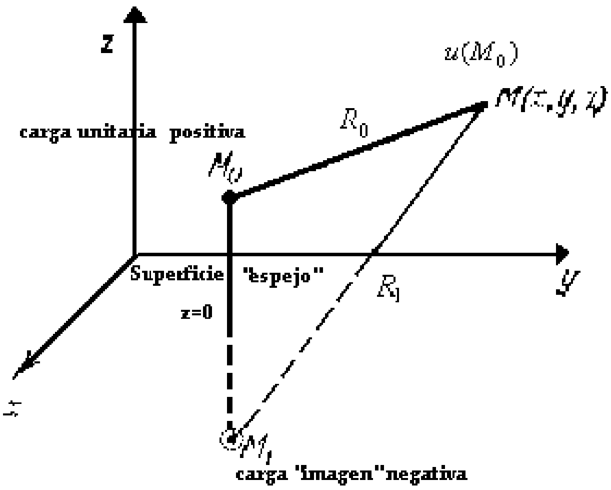

Figura 5. Potencial en semiespacio (z>0) vía función fuente

3.2 Mecánica

Si abordamos el problema de las vibraciones forzadas en una cuerda con extremos fijos.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=-f(x) \qquad 0 \quad x \quad a$$

ø(0)= ø(a)=0

Aplicando separación de variables, osea, asumiendo una solución de la forma

Ø = A(x)senkx + B(x)coskx

Se halla que:

$$y(x)=\int_0^a f(y)G(x;y)dy$$

donde:

$$G(x;y)=\frac{senkysenk(a-x)}{ksenka} \qquad 0 \quad y \quad x$$

$$G(x;y)=\frac{senkxsenk(a-y)}{ksenka} \qquad x \quad y \quad a$$

De otro lado, una solución según las propiedades de las funciones de Green, será una función tal que,

Por la propiedad 1, G(x;y) = Asenky + Bcosky 0 y x

G(x;y) = Csenky + Dcosky x y a

Por la propiedad 4, G(x;0) = B = 0

G(x;a) = Csenka + Dcoska = 0

Por propiedad 2, Asenkx = Csenkx + Dcoskx

Por propiedad 3, kCcoskx – kDsenkx – kAcoskx = – 1

Resolviendo este conjunto de ecuaciones, se tiene que

$$A=\frac{senk(a-x)}{ksenka}$$

B = 0

$$C=\frac{1}{k}\frac{senkx\cos ka}{senka}$$

$$D=\frac{1}{k}\frac{senkxsenka}{senka}$$

Luego entonces, $G(x;y)=\dfrac{senkysenk(a-x)}{ksenka}$ 0 y x

$$G(x;y)=\frac{senkxsenk(a-y)}{ksenka} \qquad \text{x y a}$$

encontrándose resultados idénticos, que era lo que se deseaba demostrar.

Ejemplo N° 01. Supongamos que deseamos resolver la ecuación diferencial ordinaria,

$$m\frac{dv}{dt} = -R\ v + f()$$

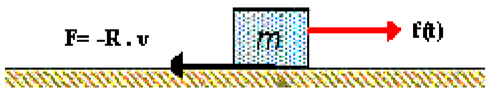

Figura 6. Movimiento de masa bajo resistencia

que podría representar el movimiento de una partícula de masa "m" en un medio que presenta resistencia (coeficiente R) bajo la influencia de una fuerza externa f(t), siendo v(t) la velocidad de la partícula.

Primero consideremos el caso particular, que ocurre cuando la partícula está en reposo en el tiempo t = τ y entonces se pone en movimiento bajo la acción de una fuerza súbita. Esto implica que la fuerza externa f(t) existe solamente durante un pequeño intervalo de tiempo, digamos de τ a $\tau + \Delta\tau$. Después del tiempo $\tau + \Delta\tau$ el movimiento de la partícula es gobernada por la ecuación homogénea.

$$m\,\frac{dv}{dt} = -R\,v \qquad\qquad (t > \tau + \Delta\tau),$$

la cual, evidentemente, tiene la solución

$$v() = A\,e^{-(R/m)\,t} \qquad\qquad (t > \tau + \Delta\tau).$$

No estamos muy interesados que sucede entre τ y $\tau + \Delta\tau$, pero estamos ciertamente interesados en el valor de A. En otras palabras, deseamos conocer el efecto de la fuerza súbita sobre la partícula. Esto puede ser obtenida multiplicando la ecuación diferencial por dt e in-tegrando entre τ y $\tau + \Delta\tau$:

$$m\,[v(\tau + \Delta\tau) - v(\tau)] = -R\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} v()\,dt + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} f()\,dt\,.$$

Si la fuerza súbita tiene un impulso I, entonces

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} f()\,dt = I$$

Asumiendo $\Delta\tau$ ser muy pequeño, se podría esperar que la velocidad v(t) presente un compor-tamiento esencialmente como el mostrado en la Fig.7 así que v(t) durante la aplicación de la fuerza súbita podría no haber sido excesivamente grande. Si esto es así podríamos obviar el término $R\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} v()\,dt$.

Ahora usemos

$$v(\tau) = 0, \qquad v(\tau + \Delta\tau) = A\,e^{-(R/m)(\tau+\Delta\tau)} \cong A\,e^{-(R/m)\,\tau}$$

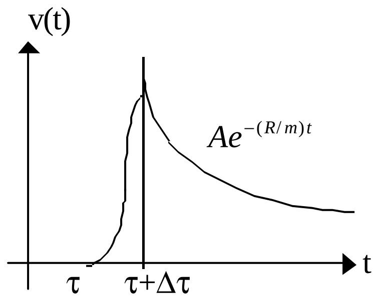

Fig.7

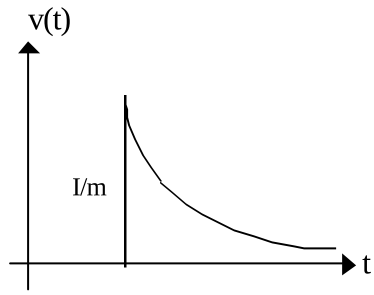

Fig.8

Entonces $mAe^{-(R/m)\tau} = I$, la que proporcionaría la solución idealizada

$$v(t) = \begin{cases} 0 & (t < \tau) \\ (I/m)\, e^{-(R/m)(t-\tau)} & (t > \tau) \end{cases}$$

Ilustrada en la Fig.8. El significado físico de nuestra aproximación es que hemos asumido que el impulso I de la fuerza súbita ha impartido a la partícula un momento lineal p = mv = I tal que la velocidad inmediatamente después de la aplicación de la fuerza súbita fue I/m, y en-tonces la partícula fue deteniéndose bajo la acción de la resistencia del medio. Hemos obviado la pérdida de momento durante la aplicación de la fuerza súbita, contenida en la integral $R\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} v(t)\, dt$, lo cual es muy razonable si $\Delta\tau$ es pequeña.

Ahora supongamos que la partícula experimenta la aplicación de dos fuerza súbitas, de impulsos I_1 y I_2 en los tiempos τ_1 y τ_2 respectivamente. Evidentemente, superponiendo las so-luciones correspondientes a cada una de las fuerzas, obtenemos el resultado

$$v(t) = \begin{cases} 0 & (t < \tau_1) \\ \dfrac{I_1}{m} e^{-(R/m)(t-\tau_1)} & (\tau_1 < t < \tau_2) \\ \dfrac{I_1}{m} e^{-(R/m)(t-\tau_1)} + \dfrac{I_2}{m} e^{(R/m)(t-\tau_2)} & (t > \tau_2) \end{cases}$$

Generalizando el problema a un número arbitrario de fuerzas súbitas, tenemos

$$v(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{I_k}{m} e^{-(R/m)(t-\tau_k)}$$

con n tal que $\tau_n < t < \tau_{n+1}$.

Finalmente, supongamos que una fuerza continua ha estado actuando sobre la partícula. Una fuerza f(t) que actúa en el tiempo τ produciría en el intervalo de tiempo $d\tau$ un impulso

$$dI = f(\tau)\, d\tau$$

que se parecería a una fuerza súbita debido a su corta duración. La acción continua de la fuerza podría entonces tener el efecto acumulativo de impulsos sucesivos dI actuando sobre la partícula. No es irrazonable esperar que la fórmula para v(t) sea dada mediante la integral

$$v(t) = \int_{\tau_0}^{t} \frac{f(\tau)d\tau}{m} e^{-(R/m)(t-\tau)} \qquad (t > \tau_0)$$

asumiendo v(t) = 0 y f(t) = 0 después de τ_0.

El razonamiento anterior, por supuesto, no prueba que está fórmula sea válida. Sin embargo podríamos tomarlo como un punto de partida, y una vez que ella ha sido escrita podemos veri-ficar que es realmente una solución de la ecuación diferencial.

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -R\, v + f(t) \qquad (t > \tau_0)$$

sujeto a la condición v(t) = 0 para $t = \tau_0$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{R}{m} \int_{\tau_0}^{t} \frac{f(\tau)\, d\tau}{m} e^{-(R/m)(t-\tau)} + \frac{f(t)}{m},$$

o

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{R}{m} v(t) + \frac{f(t)}{m}$$

lo cual significa que v(t) satisface la ecuación diferencial. La condición $v(\tau_0) = 0$ es asimismo evidente.

Nota. La forma apropiada de escribir la solución obtenida es :

$$v(t) = \begin{cases} 0 & (t < \tau_o) \\ \displaystyle\int_{\tau_o}^{t} \frac{1}{m} e^{-(R/m)(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau & (t > \tau_o) \end{cases}$$

o alternativamente,

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t, \tau)\, f(\tau)\, d\tau \qquad (\text{para todo } t)$$

donde

$$G(t, \tau) = \begin{cases} 0 & (t < \tau) \\ \dfrac{1}{m} e^{-(R/m)(t-\tau)} & (t > \tau) \end{cases}$$

La función G(t; ô) representa f ísicamente la respuesta (en este caso la velocidad) al tiempo t a un impulso unitario aplicado en el tiempo ô y se le denomina comúnmente función influencia o función Green.

Ejemplo N° 02. Ahora consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = \frac{f(t)}{m},$$

que representaría el movimiento de una oscilador armónico amortiguado bajo la acción de una fuerza externa f(t). Nuevamente asumamos que f(t) = 0, excepto para un impulso I aplicado instantáneamente al oscilador en el tiempo τ mientras estaba en reposo.

El movimiento para $t > \tau$ es dada por la solución de la ecuación homogénea

$$x(t) = C_1\, e^{-\lambda t} \cos \omega t + C_2\, e^{-\lambda t} \operatorname{sen} \omega t$$

donde $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}$ (asumiendo un amortiguamiento pequeño). Como resultado de la apli-cación de la fuerza súbita en t = τ, esperamos que x(t) es aún cero inmediatamente después del tiempo t = τ, pero la velocidad v(t) = dx/dt es dada por v(τ + 0) = I/m. Estas condiciones de-terminan las constantes C_1 y C_2 que nos conducen a

$$x() = \frac{I}{m.\omega} e^{-\lambda(t-\tau)} \operatorname{sen} \omega(- \tau) \qquad (> \tau)$$

Evidentemente, hemos evaluado la función de Green. Para hallar la solución en el caso general, reemplazamos I por f(τ)dτ e integrando sobre τ :

$$x(t) = \int_{t_o}^{t} \frac{1}{mw} e^{-l \ t-t} \ senw(t-t) f(t) dt \,,$$

y podemos ahora comprobar que esta expresión en realidad es la solución del problema.

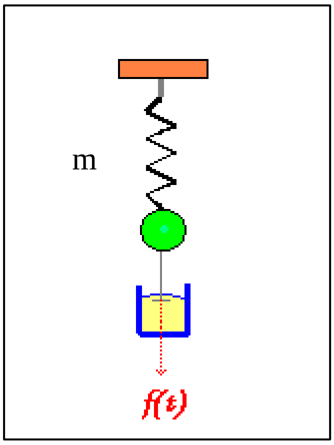

Figura 9. Oscilador armónico amortiguado forzado

Nota : La función de Green

$$G(, \tau) = \frac{1}{\omega} e^{-\lambda(t-\tau)} \operatorname{sen} \omega(- \tau)$$

representa la solución (para t > τ) para el caso de un impulso aplicado dentro de un intervalo de tiempo infinitamente corto cercano a τ. Evidentemente, la fuerza en realidad para esto debe ser “infinita”.

Por lo mismo puede ser representada por una función convencional f(t), tal como

$$f(t) = \delta(t - \tau)$$

y tratar el problema desde el punto de vista de la teoría de distribuciones. En éste sentido, la función de Green G(t, τ) deberá satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{d^2G(\;, \tau)}{dt^2} + 2\lambda \frac{dG(\;, \tau)}{dt} + \omega_o^2 G(\;, \tau) = \frac{1}{m}\delta(\; - \tau),$$

donde G(t, τ) es también considerada como una distribución.

Ejemplo N° 03 Consideremos una cuerda tensa sometida a una carga distribuida externa dada por F(x) (fuerza por unidad de longitud). El desplazamiento "u" de la cuerda es una función solamente de "x" y satisface la ecuación diferencial

$$T\frac{d^2u(x)}{dx^2} = F(x) \quad o \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{F(x)}{T} = f(x)$$

Las condiciones de contorno son, las usuales, u(0) = u(L) = 0.

Solucionemos el problema para una fuerza concentrada F_0 en el punto x = ξ. Evidente-mente, esto implica

$$f(x)=\frac{F}{T}\boldsymbol{d}(x-\boldsymbol{x})$$

y busquemos la solución de la ecuación en la forma

$$\frac{d\;\;G(x;\boldsymbol{x})}{dx}=\boldsymbol{d}(x-\boldsymbol{x}),$$

que llamaremos la función de Green para nuestro problema. .Por supuesto, requerimos que

$$G(0;\boldsymbol{x})=G(L;\boldsymbol{x})=0\,,$$

Note que G(x;ξ) satisface la ecuación diferencial homogénea para todo x excepto x = ξ. Por lo tanto ella deberá tener la forma

$$G(x;\xi) = Ax + B \ (para\, 0 \le x \le \xi)\,,$$

y la condición de contorno en x = 0 implica B = 0, mientras A queda indeterminado. Similarmente,

$$G(x;\xi) = A'x + B' \ (para\, \xi \le x \le)\,,$$

Ahora notemos que dG/dx no requiere ser continua en x = ξ. Como en realidad esperábamos la cuerda tiene el comportamiento de la cuerda mostrada en la Fig.10; ella presenta un salto de discontinuidad en la pendiente. Para hallar la magnitud de este salto, integremos la ecuación diferencial (la ecuación diferencial para G)
y la condición de contorno en x = L implica que

$$B' = -A'L$$

mientras que A’ queda indeterminado. Dado que G(x;ξ) físicamente representa una posible, aunque algunas veces idealizada, forma de la cuerda, por ello debe ser continua en x = ξ, lo cual implica

$$A\xi = A'(\xi - L),$$

determinar A’ en términos de A.

$$\frac{d^2G}{dx^2} = \delta(x - \xi)$$

entre ξ - ε y ξ + ε y entonces tomar ε → 0.

Esto nos conduce a

$$\frac{dG}{dx}(\xi+0;\xi) - \frac{dG}{dx}(\xi-0;\xi) = 1$$

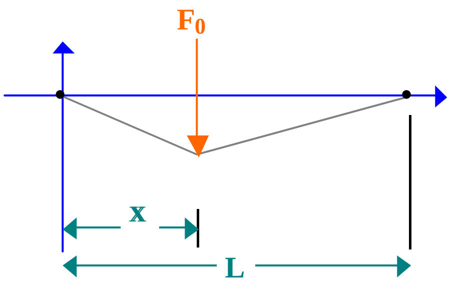

Fig.10

Ahora obtenemos $\partial G(\xi+0;\xi)/\partial x$ de

$$G(x;\xi) = \frac{A\xi}{(\xi - L)}(x - L) \ (x > \xi)$$

lo cual nos conduce a

$$\frac{dG}{dx}(\xi+0;\xi)=\frac{A\xi}{\xi-L}$$

Similarmente, de G(x ; ξ) = Ax (x < ξ), obtenemos

$$\frac{dG}{dx}(\xi-0;\xi)=A$$

Entonces, de Aξ/(ξ - L) - A = 1, obtenemos A = (ξ - L) / L. Nuestro resultado es entonces

$$G(x;\xi)=\begin{cases} -\dfrac{x(L-\xi)}{L} & (0\le x\le \xi) \\ -\dfrac{\xi(L-x)}{L} & (\xi\le x\le L) \end{cases}$$

Nótese que la función de Green es simétrica en la variable x y ξ :

En concordancia con el principio general, ahora esperamos que la solución de una ecuación diferencial no homogénea d^2u/dx^2 = F(x) / T, más las condiciones de contorno, serían dadas por:

$$u(x)=\int^{L} G(x;\xi)\frac{F(\xi)}{T}d\xi$$

CONCLUSIONES

- Las funciones de Green representan un método alternativo para la solución de problemas con condiciones de contorno y ecuaciones diferenciales no homogéneas.
- La utilidad de una solución en una función de Green se debe a que esta función es independiente del termino no homogéneo en la ecuación diferencial.
- Las soluciones para diferentes términos no homogéneos f(x) se obtiene por medio de una sola integración.
- Este método conduce a soluciones expresadas como integrales definidas, no requiriéndose por tanto, la determinación de constantes arbitrarias.
- Una función de Green es simétrica, es decir G(x;x') = G(x';x) Físicamente representa la respuesta en el punto x a un impulso unitario en el punto x' o bien la respuesta en el punto x' a un impulso unitario en el punto x.
- Una solución en términos de una integral de una función de Green puede interpretarse como el resultado de sobreponer las respuestas al conjunto de impulsos con f(x) dando la magnitud del impulso en el punto x.
- Este método aunque elegante es complejo en su realización, no siendo siempre posible hallar explicitas expresiones para las funciones Green debidas a su definición misma en términos del delta de Dirac y las condiciones de contorno que debe satisfacer.

BIBLIOGRAFIA

[1] Arfken, G. Métodos matemáticos para físicos, 3° Ed. Ed. Diana, 1981.

[2] Roach, G. F., Funciones de Green, 2° Ed., Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain, 1982.

[3] Morse, P. M.; Feshbach, H., Métodos de la Física teórica, Ed. Mc Graw-Hill, 1953.

[4] D. G. Duffy,Green's Functions with Applications, Ed. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, Florida, 2001.

[5] Jackson, J.D. Electrodinámica Clásica, Ed. Limusa, México 1982.

[6] Aki, K., Richards, P., Quantitative Seismology, Ed. W.M. Freeman, San Francisco, 1980.

[7] Tijonov, A.N., Samarsky, A.A., Problemas de la Física Matemática, Ed. Mir, Moscú 1984.