CAPITULO III

MODELO FACTORIAL

3.1 Objetivo

El análisis factorial es una técnica cuyo objetivo es describir las relaciones de covariabilidad entre muchas variables en función de unas pocas variables no observables que se denominan factores.

Sea $\vec{x}_{(px1)}$ un vector aleatorio con vector de medias $\vec{\mu}_{(px1)}$ y matriz de covarianzas $\Sigma_{(pxp)}$ simétrica y definida positiva, el modelo m factorial para el vector $\vec{x}$ está dado por (2):

$$\vec{x} = \Lambda \vec{f} + \vec{\mu} + \vec{e} \qquad (1)$$

donde:

$\Lambda_{(pxm)}$: Matriz de ponderaciones del vector $\vec{f}$.

$\vec{f}_{(mx1)}$: Vector de factores latentes no observable, cuya interpretación se efectúa mediante la matriz Λ.

$\vec{e}_{(px1)}$: Vector aleatorio no observable o vector de factores específicos.

Así:

$$\Lambda_{(pxm)} = [\,l_{ij}\,]\ ,\ \vec{f}_{(mx1)} = [f_j] \text{ y } \vec{e}_{(px1)} = [\,e_i\,] \qquad i = 1,...p \qquad j = 1,...m$$

La expresión en forma desarrollada es:

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} l_{ij} f_j + \mu_i + e_i \quad , i = 1,2,....,p$$

3.2 SUPUESTOS DEL MODELO FACTORIAL ORTOGONAL

Para este modelo, se asume que:

1.- E [$\vec{f}$] = $\vec{0}$, Cov [$\vec{f}$] = E [$\vec{f}\ \vec{f}$'] = I $_{(mxm)}$

2.- E [$\vec{e}$] = $\vec{0}$, Cov [$\vec{e}$] = E [$\vec{e}\ \vec{e}$'] = φ $_{(pxp)}$

donde φ = Diag [φ_i] , es la matriz de varianzas específicas.

3.- $\vec{f}$ y $\vec{e}$ son independientes, esto es:

$$\text{Cov}\,[\vec{e}, \vec{f}] = E\,[\vec{e}\ \vec{f}\,'] = \vec{\sigma}_{(pxm)}$$

Los supuestos y la relación establecida en la expresión :

$$\vec{x} = \Lambda\ \vec{f} + \vec{u} + \vec{e}$$

3.3 DESCOMPOSICIÓN DE LA MATRIZ DE COVARIANZAS SEGÚN EL MODELO FACTORIAL ORTOGONAL

Para determinar como es la estructura de la matriz de covarianza Σ bajo el modelo factorial ortogonal, usamos la definición:

$$\Sigma = \text{Cov}\,(\vec{x}) = E\,[(\vec{x} - \vec{u})(\vec{x} - \vec{u})']$$

$$\boxed{\Sigma = \Lambda\,\Lambda' + \varphi}$$

Σ queda descompuesta en función de $\Lambda_{(pxm)}$ matriz de ponderaciones del vector $\vec{f}$ y φ la matriz de varianzas específicas de $\vec{x}$.

La varianza de x_i y la covarianza entre las variables x_i y x_k, se expresan como:

$$\sigma_{ii} = l^2_{i1} + l^2_{i2} + ... + l^2_{im} + j_i$$

$$\sigma_{ik} = l_{i1}\, l_{k1} + l_{i2}\, l_{k2} + ... + l_{im}\, l_{km}$$

donde:

$$h^2_i = l^2_{i1} + l^2_{i2} + ... + l^2_{im}$$

es la i-ésima comunalidad .

Las comunalidades indican el grado de asociación que tienen las variables a través del factor, variabilidad compartida por las variables a través del factor.

Por lo tanto,

$$\sigma_{ii} = h^2_i + j_i$$

o equivalentemente,

$$\sigma_{ii} = \text{Comunalidad} + \text{Varianza específica}$$

Para efectos de análisis de los datos es de interés determinar la covarianza entre la i-ésima variable, x_i y el j-ésimo factor f_j.

Usando la definición de matriz de covarianza

$$\mathrm{Cov}(\vec{X}, \vec{f}) = E(\vec{X} - \vec{\mu})(\vec{f} - E(\vec{f}))'$$

Se tiene:

$$\mathrm{Cov}(\vec{X}, \vec{f}) = \Lambda$$

Luego, el coeficiente de correlación entre x_i y f_j está dado por:

$$\mathrm{Corr}(x_i, f_j) = \frac{Cov(x_i, f_j)}{\left[V(x_i)V(f_j)\right]^{1/2}}$$

$$\mathrm{Corr}(x_i, f_j) = \frac{\lambda_{ij}}{\sigma_i}$$

donde: σ_i es la desviación estándar de la i-ésima variable

3.4 PROPIEDADES DEL MODELO FACTORIAL ORTOGONAL

- **INVARIANCIA BAJO CAMBIO DE ESCALA**

Sea $\vec{x} \sim (\vec{u}, \Sigma)$, y sea $\vec{y} = C\vec{x}$, donde C = Diag (C_i) i = 1,2,....,p.

Usando el modelo:

$$\vec{x} = \Lambda \vec{f} + \vec{u} + \vec{e}$$

se obtiene el modelo factorial para la transformación:

$$\vec{y} = C\Lambda_x\vec{f} + C\vec{u} + C\vec{e}$$

donde $\Lambda_y = C\,\Lambda_x$

cuya varianza es:

$$V(\vec{y}) = \Lambda_y \Lambda'_y + \boldsymbol{j}_y$$

- **NO UNICIDAD EN LAS PONDERACIONES DE LOS FACTORES**

Cuando m>1, hay siempre algunas ambigüedades inherentes asociadas al modelo factorial. Si G es una matriz ortogonal de tamaño mxm de manera tal que :

$$GG' = G'G = I$$

la expresión (1) , puede ser escrita como:

$$\vec{X} - \vec{\mu} = \Lambda \vec{f} + \vec{\varepsilon} = \Lambda GG' \vec{f} + \vec{\varepsilon} = \Lambda^* \vec{f}^* + \vec{\varepsilon}$$

donde,

$$\Lambda^* = \Lambda G \quad y \quad \vec{f}^* = G' \vec{f}$$

desde

$$E(\vec{f}^*) = G' E(\vec{f}) = 0$$

y $\quad Cov(\vec{f}^*) = G' Cov(\vec{f})G = G'G = I_{mxm}$

Esto es imposible, sobre la base de las observaciones de X , distinguir las cargas de Λ de las cargas Λ^*.

Esto es los factores $\vec{f}$ y $\vec{f}^* = G'\vec{f}$, tienen las propiedades estadísticas e inclusive las cargas de Λ^*, son en general diferentes de las cargas de Λ, ambos generan la misma matriz de covarianzas Σ, esto es

$$\Sigma = \Lambda \Lambda' + \Psi = \Lambda GG' \Lambda' + \Psi = (\Lambda^*)(\Lambda^*)' + \Psi \qquad (2)$$

Esta ambigüedad nos da el razonamiento para la rotación del factor, desde las matrices ortogonales que corresponden a las rotaciones (reflexiones) del sistema de coordenadas para X.

Factor de Cargas Λ son determinados sólo para la matriz ortogonal

$$\Lambda^* = \Lambda G \quad y \quad \Lambda$$

Ambos nos dan la misma representación. Las comunalidades dadas por los elementos de la diagonal

$$\Lambda \quad \Lambda' = (\Lambda^*)(\Lambda^*)'$$

no son afectadas por la selección de Λ

3.5 JUSTIFICACIÓN DEL USO DEL MODELO FACTORIAL

Cabe recordar que, $\Sigma_{(pxp)}$, tiene $\frac{p(p+1)}{2}$ parámetros, en tanto que en el modelo factorial sin restricción, $\Sigma = \Lambda\Lambda' + j$, la matriz de ponderaciones de factores $\Lambda_{(mxp)}$, tiene mxp parámetros y la matriz de varianzas específicas $j_{(pxp)}$, tiene p parámetros: entonces el número total de parámetros para el modelo factorial sin restricción es mp+p.

Cuando se consideran "m" factores, se introducen $\frac{m(m-1)}{2}$ restricciones, luego la diferencia de parámetros es:

$$s = \frac{p(p+1)}{2} - \left\{ mp + p - \frac{m(m-1)}{2} \right\}$$

$$= [p^2 + p - 2mp - 2p + m^2 - m]$$

$$s = \frac{(p-m)^2}{2} - \frac{(p+m)}{2}$$

Teniendo las siguientes condiciones:

1.- En el caso que s < 0, el modelo factorial no está bien definido y no es adecuada su aplicación.

2.- Si s = 0 ,el modelo factorial contiene tanto parámetros como el modelo original. No ofrece simplificación de la suposición original.

3.- Si s>0, en este caso es útil aplicar el modelo de Análisis Factorial.

3.6 TEST DE BARLETT

Es utilizada para evaluar si la relación entre pares de variables es significativamente diferente de cero, lo que significaría evaluar que la matríz de correlación es diferente de la identidad.

Prueba de esfericidad de Bartlett

Hipótesis nula:

Ho: $\rho = I$ (donde ρ es la matriz de correlación)

H_1: $\rho \neq I$

Si H0 es rechazado entonces se procede con la aplicación de un método multivariado

3.7 INDICE DE KAISER-MEYER-OLKIN (KMO)

Es una medida de adecuación del modelo factorial.

$$KMO = \frac{\sum_{I\neq J}\sum \gamma^{2}_{Y}}{\sum_{I\neq J}\sum \gamma^{2}_{Y} + \sum_{I\neq J}\sum a^{2}_{y}}$$

Donde:

γ_{ij} : es el coeficiente de correlación de Pearson entre las variables i y j

a_{ij} : es el coeficiente de correlación parcial entre las variables i y j.

Compara los coeficientes de correlación de Pearson con los coeficientes de correlación parcial entre variables.

Fueron propuestos los siguientes intervalos para la evaluación de la adecuación del modelo (3)

0.9 < KMO<1	Muy buena
0.8 < KMO<0.9	Meritoria
0.7 < KMO<0.8	Mediana
0.6 < KMO<0.7	Mediocre
0.5 < KMO<0.6	Bajo
KMO<0.6	Inaceptable

El Análisis Factorial se puede utilizar de 3 formas: Descriptivo, Exploratorio y Confirmatorio.

1.- Descriptivo.- Cuando el objetivo es reducir la dimensionalidad de las variables a un número menor de factores, es decir de p variables a m factores de modo que m<p.

La descripción en términos de un conjunto de factores como una totalidad es más fácil de comprender y manejar debido a su número más pequeño. En este tipo de análisis se supone que la descripción en términos de factores es tan adecuada como la descripción en los términos de factores es tan adecuada como la descripción en términos de variables observables. La interpretación descriptiva de un análisis factorial debe considerarse como una simplificación de la estructura contenida en los datos.

2.- Exploratorio.- En el análisis factorial exploratorio no se tiene ninguna hipótesis definida respecto a los factores que se espera obtener y, por lo general, no se parte de ninguna teoría respecto a los factores. Bajo este enfoque se buscan los conceptos que puedan explicar los datos y espera que los factores sugieran algunas ideas que puedan ser comprobadas como hipótesis.

Esta comprobación puede consistir en una investigación experimental en la cual los factores se relacionan con las variables o en análisis correlacionales adicionales. Por ello, los factores obtenidos no deben ser considerados como resultados definitivos sino como hipótesis para confirmarla con alguna investigación posterior.

3.- Confirmatorio.- Bajo este enfoque se analiza factorialmente los datos para confirmar ciertas hipótesis determinadas, basadas en investigaciones anteriores o en alguna teoría. Esto no solamente exige ciertas expectativas acerca del número y naturaleza de los factores que se espera obtener sino que frecuentemente exige también algunas hipótesis acerca del tamaño de las ponderaciones sobre las variables medidas.

En este tipo de análisis se toman decisiones puramente subjetivas, aunque basadas sobre alguna teoría, con respecto a las variables que deben ser incluidas en el análisis y/o con respecto al número de factores que se deben excluir.

3.8 METODO DE ESTIMACIÓN

Existen varios métodos de estimación entre ellos tenemos: Componentes Principales, Componentes Principales Corregidos y Máxima – Verosimilitud.

METODO DE COMPONENTES PRINCIPALES

Usando el Teorema de Descomposición espectral **(Ver Anexo 1),** la matriz de covarianzas Σ se descompone como:

$$\Sigma = \Gamma A \Gamma' \qquad (3)$$

donde: $\Gamma = [\vec{g}_1, \vec{g}_2, ..., \vec{g}_p]$ y A = Diag $[a_1, a_2, ..., a_p]$

tal que: $a_1, a_2, ..., a_p$ son los autovalores de Σ, que cumplen $a_1 \geq a_2 \geq ..... \geq a_p$

la expresión (3) se puede escribir como:

$$\Sigma = \Gamma A^{1/2} A^{1/2} \Gamma'$$

ya que A = $A^{1/2} A^{1/2}$ y haciendo $\Lambda = \Gamma A^{1/2}$

la expresión queda: $\Sigma = \Lambda \Lambda'$

Como se quiere un modelo que explique la estructura de la matriz de covarianzas en términos de m factores, supongamos que los últimos p-m autovalores tienden a cero: $a_{m+1} = a_{m+2} = ... a_p = 0$

Así se obtiene la aproximación $\Sigma = \Lambda \Lambda'$ ... (4)

La representación aproximada en la expresión (4) asume que el vector de factores específicos $\vec{e}$, es de menor importancia y que se puede ignorar en la factorización de Σ.

Si los factores específicos se incluyen en el modelo, sus varianzas pueden obtenerse de: $\Sigma - \Lambda \Lambda'$, luego la aproximación es:

$$\Sigma = \Lambda \Lambda' + j$$

donde j es una matriz cuadrada de orden p.

La expresión en forma desarrollada es:

$$\Sigma = [\sqrt{a_1}\,\overset{\nu}{g}_1, \ldots\ldots, \sqrt{a_p}\,\overset{\nu}{g}_p\,] \begin{bmatrix} \sqrt{a_1}\,\overset{\rho}{g}_1 \\ . \\ . \\ . \\ \sqrt{a_p}\,\overset{\rho}{g}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_1 & 0 & \ldots\ldots. & 0 \\ 0 & j_2 & \ldots\ldots. & 0 \\ . & & & . \\ . & & & . \\ 0 & 0 & \ldots\ldots. & j_p \end{bmatrix}$$

tal que:

$$j_i = s_{iii} - \sum_{j=1}^{m} l^2_{ij}\text{, para i = 1,2,...,p}$$

3.9 METODOLOGÍA PARA LA ESTIMACIÓN

Se basa en la matriz de covarianzas muestral S y la metodología es la siguiente:

1.- Descomponer espectralmente S,

2.- Estima la matriz Λ de las ponderaciones

$$\hat{\Lambda} = \left[\sqrt{\hat{a}_1}\,\overset{\rho}{g}_1, \ldots\ldots, \sqrt{\hat{a}_m}\,\hat{g}_m, \sqrt{\hat{a}_{m+1}}\,\hat{g}_{m+1}, \ldots\ldots, \sqrt{\hat{a}_p}\,\hat{g}_p\right]$$

3.- Estimar la matriz j de varianza especifica.

$$\hat{j} = S - \hat{\Lambda}\,\hat{\Lambda}'$$

donde cada elemento de la matriz $\hat{j}$ se puede expresar como:

$$\hat{j} = s_{ii} - \sum_{j=1}^{m} \hat{l}^2_{ij}$$

4.- Las comunalidades son estimadas por:

$$\hat{h}^2_i = \hat{l}^2_{i1} + \hat{l}^2_{i2} + \ldots\ldots\ldots.. + \hat{l}^2_{im}$$

$$\hat{j}_i = 1 - \sum_{j=1}^{m} \hat{l}^2_{ij}\quad\text{, cuando se utiliza R}$$

Este método de estimación ofrece una gran ventaja, las ponderaciones estimadas de los factores no cambian, cuando el número de factores se incrementan.

3.10 DETERMINACIÓN DE FACTORES (2)

Para determinar el número de factores existen tres métodos: Kaiser. Varianza Explicada, Cattell.

Criterio de Kaiser

Excluye aquellos factores principales cuyos autovalores son menores que el promedio, es decir cuando se utiliza la matriz de correlación se excluyen los autovalores menores que 1.

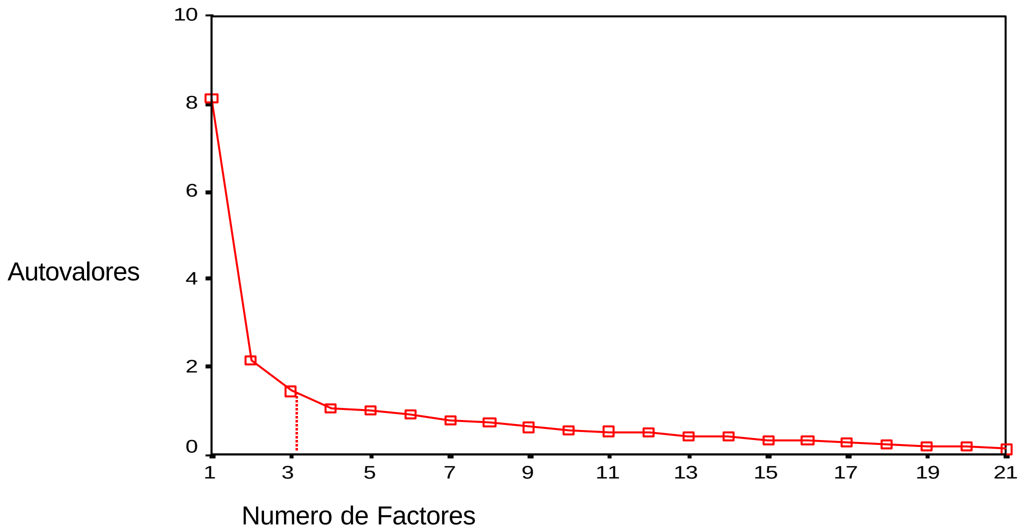
Criterio de Varianza Explicada

Incluye sólo los factores necesarios para explicar el 90% de la variación total. Dependiendo de los objetivos del estudio, si los resultados del Análisis Factorial son utilizados posteriormente en caso exploratorio puede ser suficiente considerar porcentajes que por lo menos sobrepasen el 50%.

Criterio de Cattell

La selección de los factores se realizan a partir de un gráfico de los autovalores versus los factores.

Se seleccionaran el numero de factores observando hasta que valor se produce una caída significativa de los autovalores.



3.11 ROTACIÓN

Una rotación de factores facilita la interpretación de los factores, manteniendo la propiedad de reproducir la matriz de varianzas y covarianzas o de correlación. (2)

Si $\hat{\Lambda}$ es la matriz estimada p x m de cargas factoriales obtenida por algún método (componentes principales ó máxima verosimilitud) entonces $\hat{\Lambda}^* = \hat{\Lambda}G$ donde $GG' = G'G = I$ es una matriz p x m de cargas rotadas. Además la matriz de covarianza estimada (o matriz de correlaciones) permanece inalterada, dado que

$$\hat{\Lambda}\hat{\Lambda}' + \hat{\Psi} = \Lambda GG'\hat{\Lambda} + \hat{\Psi} = \hat{\Lambda}^*\hat{\Lambda}^{*\prime} + \hat{\Psi}$$

La ecuación anterior indica que la matriz residual

$$S_n - \hat{\Lambda}\hat{\Lambda}' - \hat{\Psi} = S_n - \hat{\Lambda}^*\hat{\Lambda}^{*\prime} - \hat{\Psi}$$

no cambia. Además las varianzas específicas $\hat{\Psi}$ y las comunalidades no se alteran.

Dado que las cargas factoriales originales no son interpretables en la práctica es usual rotarlas hasta que se obtenga una estructura más simple.

Existen diversos tipos de rotación.

Los ortogonales (Varimax, Equamax y Quartimax) y los oblicuos (Promax y el Direct Oblimin).

La rotación Varimax maximiza la suma de las varianzas de las cargas al cuadrado dentro de cada factor de la matriz de cargas factoriales, la función que se maximiza es denotada con f donde cada fila de cargas está normalizado por su comunalidad esto es,

$$f = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{p} [d^2_{ij} - \bar{d}]^2$$

donde: $d_{ij} = \frac{\delta ij}{h_i}$ $\bar{d}_j = \sum_{i=1}^{p} d_{ij} / p$