



## Estudio teórico de la onda de combustión: Caso de la onda generada en la combustión del metano y aire

C. Quispe\*, A. Valderrama, W. Alvarado, M. Ormeño y R. Vargas

*Departamento Académico de Ingeniería Mecánica de Fluidos, Facultad de Ciencias Físicas  
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, A. Germán Amézaga s/n, Lima 1, Perú*

Recibido 18 junio 2011 – Aceptado 12 agosto 2011

En el presente análisis teórico, se describe la formación de ondas de choque térmicas que son producidas por la entrega de calor localizada. Se efectúa el análisis general considerando que el flujo cambia sus propiedades físicas al atravesar esta onda. Así también, para casos prácticos; se observa que estas propiedades varían levemente en un amplio intervalo de temperatura, por lo que también se analiza la formación de esta onda sin variación de las propiedades físicas del flujo; demostrando que en el flujo no solamente pueden aparecer ondas de choque dinámicas, si no también ondas de choque térmicas.

**Palabras claves:** Dinámica de fluidos, ondas de choque térmicas, subsónicas, supersónicas.

### Theoretical study of combustion wave: Case of the generated wave in the methane and air combustion

In the present theoretical analysis, is described the occurrence of thermal shock wave that is produced by the located heat delivery. The general analysis is made considering that the physical properties of the flow changes when crossing this wave. Thus also, for practical cases; its observed that these properties vary slightly in an ample range of temperature, so also is analyzed the formation of this wave without variation of the physical properties of the flow; showing that in the flow only cannot appear dynamic shock waves, but also thermal shock waves.

**Keywords:** Fluid dynamics, thermal shock waves, subsonic, supersonic.

Las ondas de choque pueden aparecer no solamente en flujos adiabáticos, sino también, cuando en una longitud infinitesimal del dominio de movimiento del flujo ocurre una intensa transferencia de energía, por ejemplo, una gran adición de calor. Tales ondas, se denominan ondas de choque térmicas.

Las ondas de choque, producidas por la combustión de mezclas reactivas, tales como las ondas de detonación o de deflagración han sido analizadas a detalle por muchos investigadores y existe una variada literatura dedicada a ellas.

Chapman-Jouguet propusieron una teoría simple, conocida actualmente como la teoría clásica, en donde las ondas de combustión se generan y propagan sin tener en cuenta los efectos de la cinética química y la estructura de la onda, adoptando una hipótesis de flujo permanente unidimensional, gas ideal y condiciones sónicas para los productos de combustión, provocando presiones y temperaturas altas durante su propaga-

ción [1].

La teoría clásica, estudia la onda estacionaria y está basada en las ecuaciones de la recta de Rayleigh y la hipérbola de Rankine-Hugoniot, describiendo los estados antes y después de la onda [2].

El presente trabajo describe la formación de las ondas de choque térmicas y la determinación de la velocidad de propagación sin recurrir a los lineamientos de la teoría clásica, utilizando las ecuaciones fundamentales de conservación y el coeficiente adimensional de la velocidad llamado también como número de Mach crítico. Se analiza el caso de la combustión de la mezcla estequiométrica de metano y aire.

### Teoría

En problemas técnicos de ingeniería, a veces es necesario lidiar con problemas de movimiento de fluidos a través de tuberías o canales que tienen una forma

\*cquispeg@yahoo.com

geométrica cualquiera, área de paso de la sección transversal, que se determina por el grado de interacción dinámica sobre el fluido. Una de estas interacciones es la influencia geométrica, cuando en el movimiento del fluido tiene lugar una variación constante del área de la sección transversal del conducto o canal. Para un sistema donde fluye un flujo permanente, unidimensional, con calores específicos constantes, y donde el sistema no realiza trabajo sobre el flujo o el flujo no realiza trabajo sobre el sistema, la ecuación de continuidad se escribe como

$$\dot{m} = \rho AV = \text{constante} \quad (1)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido, en  $\text{kg/m}^3$ ,  $A$  es el área de paso del conducto o canal, en  $\text{m}^2$  y  $V$  es la velocidad del fluido, en  $\text{m/s}$ . Tomando los logaritmos naturales en la Ec.(1) y se deriva respecto a  $x$  se obtiene que

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{V} \frac{dV}{dx} = 0 \quad (2)$$

Uno de los criterios adimensionales más conocidos es el Número de Mach que relaciona la energía cinética del flujo con la energía térmica o potencial

$$M = \frac{V}{a}, \quad a = \sqrt{kRT} \quad (3)$$

aquí  $a$  es la velocidad local del sonido, en  $\text{m/s}$ ;  $k = c_P/c_V$  es la razón de calores específicos, denominado también como índice adiabático;  $R$  es la constante universal del gas, en  $\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$  y  $T$  es la temperatura estática del fluido, en  $\text{K}$ . La desventaja del número  $M$  se debe a su carácter local, pues tanto  $V$  como  $a$  varían de sección en sección.

Para mejorar esta situación, se utiliza otro criterio adimensional conocido como el Número de Mach crítico  $M^*$  o coeficiente de velocidad  $\lambda$ , que es la relación entre la energía cinética y la energía total del flujo [3]

$$M^* = \lambda = \frac{V}{a^*}, \quad a^* = \sqrt{\frac{2}{k+1}kRT_0} \quad (4)$$

donde  $a^*$  es la velocidad crítica del flujo, en  $\text{m/s}$ ;  $T_0$  es la temperatura de estancamiento del flujo, en  $\text{K}$ , la cual es constante para el flujo adiabático, por lo que la velocidad crítica también será constante para el flujo adiabático.

La ecuación de Euler para el movimiento unidimensional [4] está dado por

$$V \frac{dV}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (5)$$

la cual se transforma de la forma siguiente

$$V \frac{V}{V} \frac{dV}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{\rho} \frac{d\rho}{dx}$$

implicando que

$$\frac{V^2}{V} \frac{dV}{dx} = -a^2 \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} \quad (6)$$

observando que  $a^2 = dp/d\rho$ , donde  $p$  es la presión estática del fluido, en  $\text{Pa}$ . Siguiendo con la transformación, se puede escribir

$$\frac{V^2}{a^2} \frac{1}{V} \frac{dV}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} \quad (7)$$

de modo que

$$\frac{V^2}{a^{*2}} \frac{a^{*2}}{a_0^2} \frac{a_0^2}{a^2} \frac{1}{V} \frac{dV}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} \quad (7)$$

donde  $a_0^2 = kRT_0$  es la velocidad del sonido en condiciones de estancamiento.

Por otro lado, las relaciones gasodinámicas se describen como [5]

$$\frac{a^{*2}}{a_0^2} = \frac{2}{k+1}, \quad \frac{a_0^2}{a^2} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\right)^{-1} \quad (8)$$

Sustituyendo la Ec.(8) en la Ec.(7) obtenemos

$$\lambda^2 \left(\frac{2}{k+1}\right) \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right) \frac{1}{V} \frac{dV}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} \quad (9)$$

Además, usando la Ec.(4) se obtiene

$$V = \lambda a^* \implies \frac{1}{V} \frac{dV}{dx} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dx} \quad (10)$$

Finalmente, sustituyendo las Ecs.(9) y (10) en la Ec.(2) se obtiene

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dx} \left[ \lambda^2 \left(\frac{2}{k+1}\right) \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{-1} - 1 \right] = \frac{1}{A} \frac{dA}{dx}$$

de donde, finalmente, obtenemos

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\lambda[(k+1) - (k-1)\lambda^2]}{(k+1)(\lambda^2 - 1)} \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \quad (11)$$

Pero el aceleramiento del flujo no solo puede darse por la variación constante del área de paso, sino también puede ocurrir en conductos o canales de área constante sometidos a una transferencia de calor, enfriamiento o calentamiento, o por la adición instantánea de calor a través de una reacción exotérmica o la incineración de algún combustible en el flujo.

Efectivamente, si un conducto tiene un área constante y bajo la condición de un gasto másico constante, la ecuación de continuidad se describe como

$$\frac{\dot{m}}{A} = \rho V = \text{constante} \implies \frac{1}{V} \frac{dV}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} \quad (12)$$

Derivando la ecuación de estado para gases ideales  $p = \rho RT$ , obtenemos

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \quad (13)$$

El primer término de la parte izquierda de la Ec.(13) puede ser reescrito a partir de la Ec.(5) como

$$V \frac{dV}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -\frac{k}{k} \frac{1}{\rho} \frac{p}{p} \frac{dp}{dx} = -\frac{a^2}{k} \frac{1}{p} \frac{dp}{dx},$$

de donde se obtiene

$$-k \frac{V^2}{a^2} \frac{1}{V} \frac{dV}{dx} = \frac{1}{p} \frac{dp}{dx}. \quad (14)$$

Sustituyendo las Ecs.(12) y (14) en la Ec.(13) se obtiene

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dx} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dx} \left( k \frac{V^2}{a^2} - 1 \right). \quad (15)$$

En este punto, es necesario encontrar una expresión para la parte izquierda de la Ec.(15), la cual se puede hallar a través de la ecuación de la conservación de la energía para el sistema, en la dirección del movimiento [6],

$$\frac{dq}{dx} = c_P \frac{dT}{dx} - \frac{dw_{\text{tec}}}{dx} + V \frac{dV}{dx}$$

donde  $q$  es la cantidad de calor transferido al sistema, en J/kg;  $c_P = Rk/(k-1)$  es el calor específico a presión constante, en J/(kg-K),  $w_{\text{tec}}$  es el trabajo técnico o útil por unidad de masa, que para el presente caso es nulo, entonces,

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dx} = \frac{(k-1)}{kRT} \frac{dq}{dx} - \frac{(k-1)}{kRT} V \frac{dV}{dx},$$

si la parte derecha se multiplica y divide por  $k$  se obtiene que

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dx} = \frac{(k-1)}{a^2} \frac{dq}{dx} - \frac{(k-1)}{a^2} V \frac{dV}{dx}.$$

Sustituyendo esta última expresión en la Ec.(15) resulta

$$\frac{(k-1)}{a^2} \frac{dq}{dx} - \frac{(k-1)}{a^2} V \frac{dV}{dx} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dx} \left( k \frac{V^2}{a^2} - 1 \right),$$

luego de efectuar algunas operaciones obtenemos

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dx} \left( \frac{V^2}{a^2} - 1 \right) = -\frac{(k-1)}{a^2} \frac{dq}{dx},$$

multiplicando ambos lados por  $V^2$  tenemos

$$\left( \frac{V^2}{a^2} - 1 \right) V \frac{dV}{dx} = -(k-1) \frac{V^2}{a^2} \frac{dq}{dx}, \quad (16)$$

expresando la Ec.(16) en función de  $M$  resulta

$$(M^2 - 1) V \frac{dV}{dx} = -(k-1) M^2 \frac{dq}{dx}, \quad (17)$$

mientras si la expresamos en función del coeficiente de velocidad  $\lambda$  realizando el siguiente siguiente artificio

$$\left( \frac{V^2}{a^{*2}} \frac{a_0^2}{a^2} - 1 \right) V \frac{dV}{dx} = -(k-1) \frac{V^2}{a^2} \frac{a^{*2}}{a_0^2} \frac{dq}{dx}$$

obtenemos

$$\frac{(k+1)}{2(k-1)} \left( \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2} \right) V \frac{dV}{dx} = -\frac{dq}{dx}. \quad (18)$$

El análisis de la dinámica del flujo se realiza en base a las Ecs.(17) y (18). De la Ec.(18) se observa que el coeficiente  $(k+1)/[2(k-1)]$  es positivo, al igual que la velocidad, por tanto, en el régimen subsónico cuando  $\lambda < 1$  y  $M < 1$ , la velocidad aumenta si  $dV/dx > 0$ , es decir, cuando se adicione calor al flujo,  $dq/dx > 0$ . El caso inverso ocurre cuando se retira calor del flujo, es decir, cuando  $dq/dx < 0$  se tiene una disminución de la velocidad del flujo, pues  $dV/dx < 0$ .

En el régimen supersónico cuando  $\lambda > 1$  y  $M > 1$ , la velocidad del flujo se incrementa cuando  $dV/dx > 0$ , por lo tanto,  $dq/dx < 0$ , es decir, cuando se retira calor del flujo. El caso opuesto ocurre si se entrega calor al flujo, pues produce un desaceleramiento con  $dV/dx < 0$ . Esto también puede notarse si se analiza el flujo Rayleigh, el cual tiene el mismo fundamento teórico que el aquí indicado.

Cuando  $V = a = a^*$ ,  $M = 1$  y  $\lambda = 1$ , se observa que  $dq/dx = 0$ , indicando una ausencia de transferencia de calor en cualquier sentido.

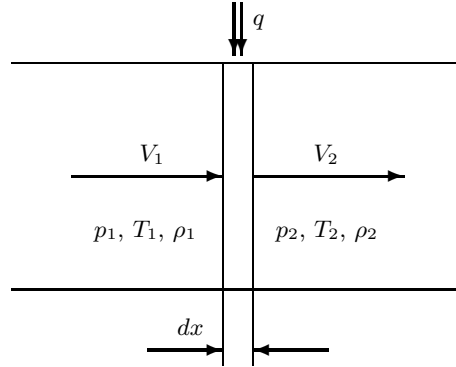


Figura 1: Esquema de la onda de choque térmica.

Un caso particular e importante a ser analizado es aquel cuando la transferencia de calor ocurre en forma concentrada, es decir, en un pequeño tramo del canal o conducto a través del cual el gas fluye continuamente, en este caso, esta sección puede considerarse de área constante. Esta forma de intercambio de calor concentrado ocurre durante los procesos de combustión, fenómenos de detonación, reacciones químicas exotérmicas y endotérmicas. Para estos casos, los parámetros termodinámicos y la velocidad del flujo varían como saltos o discontinuidades formando lo que se conoce como onda de choque térmica.

Para observar la variación de los parámetros del flujo en la onda de choque térmica, se analiza un volumen de control del canal o conducto de longitud infinitesimal

$dx$  en la dirección de movimiento del flujo, suponiendo que en toda la sección de longitud infinitesimal se produce un intercambio uniforme de una determinada cantidad de calor por unidad de masa.

La onda de choque térmica es normal y se designa con el subíndice 1 los parámetros del flujo antes de la onda y con el subíndice 2 los parámetros del flujo después de la misma. También se considera que los fenómenos de difusión, conductividad térmica e influencia del rozamiento son sumamente pequeños y por lo tanto se desprecian. El gas es ideal, con calores específicos constantes,  $k = \text{cte}$  o térmicamente perfecto. Los calores específicos son funciones de la temperatura, al igual que su razón de calores específicos. El gas es físicamente homogéneo antes y después de la onda, pero en la zona donde se produce la onda de choque térmica, el calor específico y la razón de calores específicos varían en forma de salto.

Para el análisis de las ondas de choque térmicas usamos las ecuaciones fundamentales de los fluidos tales como la continuidad,

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad , \quad (19)$$

la conservación de la cantidad de movimiento,

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 \quad , \quad (20)$$

la conservación de la energía,

$$\frac{V_1^2}{2} + h_1 + q = \frac{V_2^2}{2} + h_2 \quad , \quad (21)$$

donde  $h_1$  y  $h_2$  son las entalpías definidas como

$$h_1 = c_{P_1} T_1 = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \quad \text{y} \quad h_2 = c_{P_2} T_2 = \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} \quad .$$

La conservación de energía también es expresada a través de los parámetros de estancamiento, como

$$h_{01} + q = H_{02} \quad \text{o} \quad c_{P_1} T_{01} + q = c_{P_2} T_{02} \quad . \quad (22)$$

Adicionalmente, usamos la ecuación de estado dado por

$$p_1 = \rho_1 R_1 T_1 \quad \text{y} \quad p_2 = \rho_2 R_2 T_2 \quad . \quad (23)$$

La solución se obtiene al resolver conjuntamente las Ecs.(19), (20) y (21). De la Ec.(20) y (19) se obtiene

$$\frac{p_1}{\rho_1} + V_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{p_2}{\rho_2} + V_2^2 \right) = \frac{V_1}{V_2} \left( \frac{p_2}{\rho_2} + V_2^2 \right) \quad ,$$

y de la Ec.(23),  $p/\rho = RT$ , luego

$$R_1 T_1 + V_1^2 = \frac{V_1}{V_2} (R_2 T_2 + V_2^2) \quad . \quad (24)$$

La temperatura después de la onda se encuentra de la Ec.(21), resultando

$$c_{P_1} T_{01} + q = \frac{V_2^2}{2} + c_{P_2} T_2 \implies T_2 = \frac{c_{P_1}}{c_{P_2}} T_{01} + \frac{q}{c_{P_2}} - \frac{V_2^2}{2c_{P_2}} \quad .$$

Sustituyendo la expresión anterior en la Ec.(24) se obtiene

$$R_1 T_1 + V_1^2 = \frac{V_1}{V_2} \left[ R_2 \left( \frac{c_{P_1}}{c_{P_2}} T_{01} + \frac{q}{c_{P_2}} - \frac{V_2^2}{2c_{P_2}} \right) + V_2^2 \right] \quad . \quad (25)$$

Como la entalpía de estancamiento y el índice adiabático del fluido cambian al pasar por la onda térmica, entonces la velocidad crítica no será la misma a ambos lados de la onda, de modo que

$$a_1^* = \sqrt{2 \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1} h_{01}} \quad \text{y} \quad a_2^* = \sqrt{2 \frac{k_2 - 1}{k_2 + 1} h_{02}} \quad , \quad (26)$$

por otro lado, de la Ec.(22) obtenemos

$$h_{01} + q = h_{02} \implies 1 + \frac{q}{h_{01}} = \frac{h_{02}}{h_{01}} \quad ,$$

y usando la Ec.(26), esta última expresión se transforma en

$$\frac{a_2^{*2}}{a_1^{*2}} = \left( \frac{k_1 + 1}{k_1 - 1} \right) \left( \frac{k_2 - 1}{k_2 + 1} \right) \left( 1 + \frac{q}{h_{01}} \right) \quad ,$$

pero, introduciendo el concepto de calor adimensional,

$$\bar{q} = \frac{q}{h_{01}} = \frac{q}{c_{P_1} T_{01}} \quad ,$$

la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{a_2^{*2}}{a_1^{*2}} = \left( \frac{k_1 + 1}{k_1 - 1} \right) \left( \frac{k_2 - 1}{k_2 + 1} \right) (1 + \bar{q}) \quad . \quad (27)$$

Volviendo a la Ec.(25) efectuamos una serie de operaciones, cuyo detalle se muestra en el apéndice, para obtener el coeficiente de velocidad,

$$\lambda_2^2 - \kappa \left( \frac{1 + \lambda_1^2}{\lambda_1 \sqrt{1 + \bar{q}}} \right) \lambda_2 + 1 = 0 \quad , \quad (28)$$

donde, ver apéndice,

$$\kappa = \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{k_1^2 - 1}{k_2^2 - 1}} \quad ,$$

el cual dependerá únicamente de las propiedades del fluido antes y después de la onda de choque térmica.

Considerando que todos los parámetros del flujo antes de la onda son conocidos, entonces la Ec.(28) se resuelve obteniéndose

$$\lambda_2 = \frac{\kappa}{2} \left( \frac{1 + \lambda_1^2}{\lambda_1 \sqrt{1 + \bar{q}}} \right) \pm \sqrt{\frac{\kappa^2 (1 + \lambda_1^2)^2}{4 \lambda_1^2 (1 + \bar{q})} - 1} \quad . \quad (29)$$

Se observa que la Ec.(29) se simplifica para el caso particular en que las propiedades físicas del fluido no

varian cuando atraviesa la onda de choque, esto significa que  $k_1 = k_2 = k$  y  $\kappa = 1$ , resultando

$$\lambda_2 = \frac{1 + \lambda_1^2}{\lambda_1 \sqrt{1 + \bar{q}}} \pm \sqrt{\frac{(1 + \lambda_1^2)^2}{4\lambda_1^2(1 + \bar{q})} - 1} \quad (30)$$

Las soluciones de las Ecs.(29) y (30) muestran, teóricamente, la posible existencia de cuatro tipos de ondas de choque térmicas normales. Estas soluciones dependen del régimen del flujo, si es subsónico con  $\lambda_1 < 1$  o si es supersónico con  $\lambda_1 > 1$  y también depende de la cantidad de calor adimensional en la forma  $1 - \bar{q}$ .

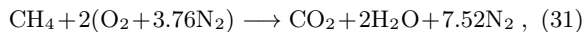
Con respecto a la velocidad adimensional después del paso de la onda, esta es subsónica con  $\lambda_2 < 1$  o supersónica con  $\lambda_2 > 1$ .

La formación de ondas de choque térmicas, que inicialmente se mueven en el régimen subsónico,  $\lambda_1 < 1$ , físicamente es imposible que pasen a ser supersónico después del paso de la onda cuando  $\lambda_2 > 1$ , ya que para que esto ocurra es necesario organizar un rápido enfriamiento del flujo, con una extracción instantánea de calor lo cual es físicamente imposible. Así también, tampoco se forma una onda de choque térmica cuando el flujo antes y después de la onda son supersónicos, puesto que estas ondas se moverían respecto al fluido que se encuentra frente a ella y sus apariciones no deberían reflejarse en el estado del gas.

En consecuencia, físicamente solo es posible la realización de dos tipos de ondas térmicas

- Cuando el flujo se mueve del régimen supersónico al régimen subsónico, de  $\lambda_1 > 1$  a  $\lambda_1 < 1$ , la transferencia de calor va acompañado de la compresión del gas,  $p_2 > p_1$ . En combustión de mezclas reactivas, estas ondas son llamadas *ondas de detonación*.
- Cuando el flujo, antes y después de la onda, se mueve en el régimen subsónico,  $\lambda_1 < 1$  y  $\lambda_2 < 1$ , origina una *onda de deflagración*, donde la transferencia de calor va acompañada de un proceso de expansión del gas,  $p_2 < p_1$ .

Para el caso de la combustión estequiométrica de una mezcla explosiva de metano y aire de la forma



la razón estequiométrica aire/combustible está dada por [1],

$$(A/F)_{\text{esteq}} = \left( \frac{m_{\text{air}}}{m_{\text{comb}}} \right)_{\text{esteq}} = \frac{64 + 7.52 \times 28}{12 + 4} = 17.16 \quad ,$$

donde  $m_{\text{air}}$  es la masa del aire y  $m_{\text{comb}}$  es la masa del combustible que intervienen en la reacción.

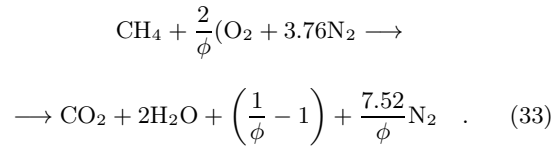
La razón de equivalencia  $\phi$  definida como

$$\phi = \frac{(A/F)_{\text{esteq}}}{(A/F)} \quad , \quad (32)$$

se usa cualitativamente para indicar si la mezcla combustible/oxidante es rica, pobre o estequiométrica, es decir,

- $\phi < 1$  mezcla pobre,
- $\phi = 1$  mezcla estequiométrica,
- $\phi > 1$  mezcla rica.

Así, la reacción del combustión en el caso de una mezcla pobre se describe como



La cantidad de calor desprendida de la reacción del combustión se determina como

$$q = m_{\text{comb}} \text{PCI}_{\text{comb}} \quad , \quad (34)$$

donde  $\text{PCI}_{\text{comb}}$  es el poder calorífico inferior del combustible.

## Resultados

Para el presente análisis teórico, asumimos que la reacción se produce a condiciones estándar y que las propiedades termodinámicas del flujo antes y después de la onda son conocidas o son obtenidas a partir de la reacción exotérmica.

Para definir los índices adiabáticos de los reactantes  $k_1$  y de los productos de combustión  $k_2$ , se considera como referencia los índices adiabáticos de cada uno de los componentes de acuerdo a la regla de mezclas,

$$k = \sum_{i=1}^n X_i k_i \quad , \quad (35)$$

donde  $X_i$  es la fracción molar de cada componente.

En la tabla 1, se muestran los resultados obtenidos para la reacción estequiométrica de la quema de metano y aire.

La solución de la Ec.(29) tiene una serie de particularidades que enunciamos a continuación. Para que exista una solución única para  $\lambda_2$ , el discriminante de la Ec.(29) debe ser nulo, de modo que

$$\frac{\kappa^2(1 + \lambda_1^2)^2}{4\lambda_1^2(1 + \bar{q})} - 1 = 0 \quad . \quad (36)$$

Elemento	$n$	$M$ (kg/kmol)	$m$ (kg)	$k$	$X$	$Y$
CH <sub>4</sub>	1.00	16.043	16.043	1.3055	0.3333	0.2169
Aire	2.00	28.960	57.920	1.4005	0.6667	0.7831
Reactantes	3.00	24.655	73.965	1.3688	1.0000	1.0000
CO <sub>2</sub>	1.00	44.011	44.011	1.3161	0.0951	0.1514
H <sub>2</sub> O	2.00	18.015	36.030	1.3129	0.1901	0.1239
N <sub>2</sub>	7.52	28.013	210.658	1.4048	0.7148	0.7247
Productos	10.52	27.634	290.710	1.3803	1.0000	1.0000

**Tabla 1:** Propiedades termodinámicas para reactantes y productos de la quema de metano y aire. Fuente: Físicanet [7].

La solución de la Ec.(29) tiene una serie de particularidades que enunciamos a continuación. Para que exista una solución única para  $\lambda_2$ , el discriminante de la Ec.(29) debe ser nulo,

$$\frac{\kappa^2(1 + \lambda_1^2)^2}{4\lambda_1^2(1 + \bar{q})} - 1 = 0 \quad , \quad (37)$$

suponemos que  $\lambda_1$  es conocido y resolviendo para  $\bar{q}$  obtenemos

$$\sqrt{1 + \bar{q}} = \frac{\kappa(1 + \lambda_1^2)}{2\lambda_1} \quad (38)$$

o

$$\bar{q}_{\max} = \frac{\kappa^2(1 + \lambda_1^2)^2}{4\lambda_1^2} - 1 \quad . \quad (39)$$

Para valores mayores de  $\bar{q}_{\max}$  el discriminante es negativo, no existiendo una solución real para  $\lambda_2$ .

$\lambda_1$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.5	1.8	2.0	2.3	2.5
$\bar{q}$	5.634	1.063	0.261	0.031	-0.019	0.014	0.152	0.361	0.533	0.835	1.063
$\lambda_2$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

**Tabla 2:** Valores de  $\lambda_2$  y  $\bar{q}$  en función de  $\lambda_1$ .

En la tabla 2, también se observa que para cualquier régimen, subsónico o supersónico, el calor se vuelve negativo cuando tiende al valor sónico. Físicamente es imposible este evento pues es necesario una extracción instantánea de calor. Por lo tanto, el flujo es imposible para cierto intervalo de  $\lambda_1$ .

Si la Ec.(36) se resuelve para  $\lambda_1$  haciendo que  $\bar{q} = 0$ , obtenemos

$$\left(\lambda_1^2 + \frac{2}{\kappa}\lambda_1 + 1\right) \left(\lambda_1^2 - \frac{2}{\kappa}\lambda_1 + 1\right) = 0 \quad , \quad (41)$$

y resolviendo esta ecuación se obtienen dos soluciones negativas y dos soluciones positivas. Físicamente, las

Sustituyendo el valor de  $\sqrt{1 + \bar{q}}$  en la Ec.(29) se obtiene que

$$\lambda_2 = \frac{\kappa}{2} \left[ \frac{(1 + \lambda_1^2)}{\lambda_1} \frac{2\lambda_1}{\kappa(1 + \lambda_1^2)} \right] = 1 \quad , \quad (40)$$

esto quiere decir, que bajo determinadas condiciones de velocidad antes de la onda,  $\lambda_1$ , existe una determinada cantidad de calor  $\bar{q}_{\max}$  para alcanzar las condiciones sónicas después de la onda térmica,

De los cálculos efectuados cuyos resultados se muestran en la tabla 2, se observa que en el régimen subsónico, a medida que el valor de  $\lambda_1$  aumenta hasta acercarse a la unidad, el calor adicionado disminuye; mientras que, en el régimen supersónico, el calor también disminuye cuando  $\lambda_1$  tiende a la unidad.

soluciones corresponden a las positivas,

$$\lambda_1 = 1.1472 \quad \text{y} \quad \lambda_1 = 0.8717 \quad ,$$

esto indica que el flujo es imposible físicamente en el intervalo  $0.8717 < \lambda_1 < 1.1472$ .

Por otro lado, existe un valor máximo para la velocidad después de la onda que está relacionado al máximo valor de  $\lambda$  [5],

$$\lambda_2 = \lambda_{\max} = \sqrt{\frac{k_2 + 1}{k_2 - 1}} \quad , \quad (42)$$

sustituyendo este valor en la Ec.(29) se obtiene una de-

pendencia entre  $\lambda_1$  y  $\bar{q}$ , dado por

$$\frac{\kappa}{2} \left( \frac{1 + \lambda_1^2}{\lambda_1 \sqrt{1 + \bar{q}}} \right) \pm \sqrt{\frac{\kappa^2(1 + \lambda_1^2)^2}{4\lambda_1^2(1 + \bar{q})} - 1} - \sqrt{\frac{k_2 + 1}{k_2 - 1}} = 0 \quad (43)$$

que al resolver cuando  $\bar{q} = 0$  encontramos los valores extremos para los cuales se alcanza la velocidad máxima después de la onda

$$\kappa(1 + \lambda_1^2) - 2\lambda_1 \sqrt{\frac{k_2 + 1}{k_2 - 1}} \pm \sqrt{\kappa^2(1 + \lambda_1^2)^2 - 4\lambda_1^2} = 0 \quad (44)$$

La ecuación anterior proporciona dos valores  $\lambda_1 = 0.3945$  y  $\lambda_1 = 2.5344$ . Esto indica que para valores de  $\lambda_1 \leq 0.3945$  el flujo tras la onda alcanza la velocidad teórica máxima con un incremento de calor. Fuera de este dominio, el flujo tras la onda no alcanzará la velocidad máxima teórica.

## Conclusiones

Las ondas de choque dinámicas, además de normales pueden ser oblicuas y curvilíneas. El análisis teórico propuesto confirma que las ondas adiabáticas de diversos tipos son casos particulares de discontinuidades, las cuales aparecen en los flujos supersónicos y están relacionados con la derivación del flujo cuando encuentra superficies sólidas de cualquier forma.

El análisis teórico demuestra que el aceleración de flujos que se mueven por ductos o canales de área constante, también se produce por un intercambio de calor localizado. En las ondas de detonación, el flujo pasa de subsónico a supersónico, con un frente de compresión. Las ondas de deflagración son subsónicas y van acompañadas con transferencia de calor y una onda de expansión. En las proximidades del régimen sónico, la formación de ondas de choque térmicas es imposible, ya que implica una extracción instantánea de calor.

## Apéndice

### Deducción de la solución de la Ec.(28)

Si en la Ec.(24) se sustituye la temperatura  $T_2$ , se obtiene la Ec.(25),

$$R_1 T_1 + V_1^2 = \frac{V_1}{V_2} \left[ R_2 \left( \frac{c_{P_1}}{c_{P_2}} T_{01} + \frac{q}{c_{P_2}} - \frac{V_2^2}{2c_{P_2}} \right) + V_2^2 \right],$$

$$\begin{aligned} R_1 T_1 + V_1^2 &= R_2 \frac{c_{P_1}}{c_{P_2}} T_{01} \frac{V_1}{V_2} \times \\ &\times \left[ 1 + \frac{q}{c_{P_1} T_{01}} - \frac{1}{c_{P_1} T_{01}} \frac{V_2^2}{2} + \frac{1}{R_2} \frac{c_{P_2}}{c_{P_1} T_{01}} V_2^2 \right], \\ &\frac{R_1}{R_2} \frac{c_{P_2}}{c_{P_1}} \frac{T_1}{T_{01}} + \frac{1}{R_2} \frac{c_{P_2}}{c_{P_1} T_{01}} V_1^2 = \\ &= \frac{V_1}{V_2} \left[ 1 + \bar{q} + \frac{2c_{P_2} - R_2}{2R_2 c_{P_1} T_{01}} V_2^2 \right], \\ &\frac{k_2}{k_1} \frac{k_1 - 1}{k_2 - 1} \frac{T_1}{T_{01}} + \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1} \frac{2k_2}{k_2 - 1} \frac{V_1^2}{a_1^{*2}} = \\ &= \frac{V_1}{a_1^*} \frac{a_2^*}{V_2} \sqrt{\frac{k_1 - 1}{k_1 + 1} \frac{k_2 + 1}{k_2 - 1} \frac{c_{P_1} T_{01}}{c_{P_2} T_{02}}} \left[ 1 + \bar{q} + \frac{c_{P_2} T_{02}}{c_{P_1} T_{01}} \frac{V_2^2}{a_2^{*2}} \right], \\ &\frac{k_2}{k_1} \frac{k_1 - 1}{k_2 - 1} \left( 1 - \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1} \lambda_1^2 \right) + \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1} \frac{2k_2}{k_2 - 1} \lambda_1^2 = \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{k_1 - 1}{k_1 + 1} \frac{k_2 + 1}{k_2 - 1} \frac{h_{01}}{h_{02}}} \left[ 1 + \bar{q} + \frac{h_{02}}{h_{01}} \lambda_2^2 \right]. \end{aligned}$$

Pero  $h_{02}/h_{01} = 1 + \bar{q}$ , luego

$$\begin{aligned} &\frac{k_2}{k_1} \frac{k_1 - 1}{k_2 - 1} \left( 1 - \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1} \lambda_1^2 + \frac{2k_1}{k_1 + 1} \lambda_1^2 \right) = \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{k_1 - 1}{k_1 + 1} \frac{k_2 + 1}{k_2 - 1} \frac{1}{1 + \bar{q}}} \left[ (1 + \bar{q}) + (1 + \bar{q}) \lambda_2^2 \right], \\ &\frac{k_2}{k_1} \frac{k_1 - 1}{k_2 - 1} (1 + \lambda_1^2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{k_1 - 1}{k_1 + 1} \frac{k_2 + 1}{k_2 - 1} \frac{(1 + \bar{q})^2}{(1 + \bar{q})}} (1 + \lambda_2^2), \\ &\frac{k_2}{k_1} \frac{k_1 - 1}{k_2 - 1} \sqrt{\frac{k_1 + 1}{k_1 - 1} \frac{k_2 - 1}{k_2 + 1}} \left( \frac{1 + \lambda_1^2}{\lambda_1 \sqrt{1 + \bar{q}}} \right) \lambda_2 = 1 + \lambda_2^2, \\ &\lambda_2^2 - \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{k_1^2 - 1}{k_2 - 1}} \left( \frac{1 + \lambda_1^2}{\lambda_1 \sqrt{1 + \bar{q}}} \right) \lambda_2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Haciendo

$$\kappa = \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{k_1^2 - 1}{k_2^2 - 1}}$$

la ecuación anterior se transforma en

$$\lambda_2^2 - \kappa \left( \frac{1 + \lambda_1^2}{\lambda_1 \sqrt{1 + \bar{q}}} \right) \lambda_2 + 1 = 0.$$

## Referencias

[1] S. R. Turns, *An Introduction of Combustion: Concepts and Applications*, segunda edición, McGraw-

Hill, New York (2000).

[2] K. K. Kuo, *Principles of Combustion*, segunda edición, John Wiley & Sons, Inc., New York (2002).

- [3] M. Zucrow y J. Hoffman, *Gas dynamics*, tercera edición, John Wiley & Sons, Inc., New York (1976).
- [4] R. Zucker y O. Biblarz, *Fundamentals of Gas Dynamics*, segunda edición, John Wiley & Sons, Inc., New York (2002).
- [5] M. Deich y A. Zariankin, Hidrogasodinámica, edición en ruso, Energoatomizdat, Moscú (1984).
- [6] I. L. Povj, Hidromecánica Técnica, segunda edición en ruso, Mashinostrayenie, Moscú (1976).
- [7] Fisicanet, [http://www.fisicanet.com.ar/fisica/gases/tb02\\_gases\\_reales\\_calculos2.php](http://www.fisicanet.com.ar/fisica/gases/tb02_gases_reales_calculos2.php).