PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XII N°2, pp. 86-93, Lima - Perú. Agosto 2009

Una Desigualdad de Carleman para un sistema de Ecuaciones Parabólicas Acopladas

Victor Rafael Cabanillas Zannini[1]

Resumen: En este trabajo consideramos un sistema linealizado de ecuaciones parabólicas acopladas asociadas a un sistema semilineal de ecuaciones del calor. Siguiendo las ideas de O. Imanuvilov, M. Yamamoto y L. de Teresa probamos una estimativa de tipo Carleman para un sistema de ecuaciones parabólicas que envuelven términos gradientes. Esta clase de sistemas aparecen en el estudio de controles que hacen insensitiva a la norma de la solución de una ecuación semilineal del calor.
Palabras clave: Desigualdad de Carleman, controles insensitivos, desigualdad de observabilidad.

A Carleman's Inequality for a System of Coupled Parabolic Equations

Abstract: In this work we consider a linearized system of parabolic equations associated to a semilinear system of heat equations. Following the ideas of O. Imanuvilov, M. Yamamoto and L. de Teresa we prove a estimate of Carleman type for a system of parabolic equations involving gradient terms. This class of systems appears in the treatment of controls insensitizing the norm of the solution of a semilinear heat equation.
Key words: Carleman inequality, insensitizing controls, observability inequality.

1. Introduction

Sea Ω un dominio abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con frontera suficientemente regular Γ. Sea $T > 0$, y denotemos por $Q = \Omega \times (0, T)$ el cilindro generado por Ω y por $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ su frontera lateral. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones parabólicas

$$\begin{cases} p' - \Delta p + Ap + B.\nabla p = 0 & , \text{ en } Q \\ p = 0 & , \text{ sobre } \Sigma \\ p(0) = p^0 & , \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} -z' - \Delta z + az - \operatorname{div}(bz) = p1_{\mathcal{O}} & , \text{ en } Q \\ z = 0 & , \text{ sobre } \Sigma \\ z(T) = 0 & , \text{ en } \Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

donde $a, A \in L^\infty(Q)$, $b, B \in [L^\infty(Q)]^n$, y $p^0 \in L^2(\Omega)$.

Es bien conocido que bajo las hipótesis anteriores, el sistema (1.1)-(1.2) posee una única solución (p, z) tal que

$$(p, z) \in \left[C([0, T]; L^2) \cap L^2(0, T; H_0^1)\right]^2.$$

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, Lima, Perú, e-mail: vcabanillasz@unmsm.edu.pe

Sistemas de la forma (1.1)-(1.2) aparecen en el estudio de la existencia de controles insensitivos para ecuaciones parabólicas semilineales. (ver [2], [3], [8]).

Sea $\Phi : L^2(Q) \to \mathbb{R}$ el funcional diferenciable definido por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}} u^2(x,t)\,dxdt.$$

donde $\mathcal{O}$ es llamado *conjunto de observación* y u es definida sobre el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{cases} u' - \Delta u + f(u, \nabla u) = \xi + h\chi_\omega & , \text{ en } Q \\ u = 0 & , \text{ sobre } \Sigma \\ u(x,0) = y^0(x) + \tau u^0(x) & ; \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

En (1.3), u es la función estado y h es la *función control*. El conjunto $\omega \subset \Omega$ es el *conjunto de control*, y el término $h\chi_\omega$ indica que el control h está actuando únicamente sobre el conjunto ω. La función f es de clase $C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, globalmente Lipschitz y $f\left(0,\overline{0}\right) = 0$.

Definición. Decimos que la función h en (1.3) es un *control insensitivo* de Φ si

$$\left.\frac{\partial\Phi(u(x,t;h,\tau))}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = 0, \quad \forall\, v^0 \in L^2(\Omega) \tag{1.4}$$

Esta condición es llamada *condición de insensitividad.* Esta definición indica que el funcional Φ es localmente insensitivo ante la perturbación τu^0.

Como fue demostrado en [1], [8], [2], la condición de insensitividad (1.4) es equivalente al problema de controlabilidad exacta para un sistema de ecuaciones parabólicas semilineales de la forma

$$\begin{cases} y' - \Delta y + f(y, \nabla y) = \xi + h\chi_\omega & , \text{ en } Q \\ y = 0 & , \text{ sobre } \Sigma \\ y(0) = y^0 & , \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\begin{cases} -q' - \Delta q + f_\sigma(y, \nabla y)\,q - \operatorname{div}(f_\varsigma(y,\nabla y)\,q) = y\chi_{\mathcal{O}} & , \text{ en } Q \\ q = 0 & , \text{ sobre } \Sigma \\ q(T) = 0 & , \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

Por técnicas de punto fijo, el problema de controlabilidad para (1.5)-(1.6) puede ser reducido al problema de la controlabilidad de un sistema linealizado de la forma (1.1)-(1.2).

La principal dificultad cuando se estudia la existencia de controles insensitivos es probar que para algún M suficientemente grande existe $C > 0$ tal que la siguiente desigualdad de observabilidad es válida

$$\int_0^T \int_\Omega \exp\left(-Mt^{-1}\right) z^2 dxdt \leq C\int_0^T \int_\omega z^2 dxdt$$

Para demostrar esta desigualdad es necesaria una estimativa de tipo Carleman para el sistema (1.1)-(1.2).

En este artículo, probaremos una estimativa de tipo Carleman para (1.1)-(1.2), para lo cual usaremos una desigualdad de Carleman debida a O. Yu. Imanuvilov y M. Yamamoto [7] y seguimos las ideas de L. de Teresa [8].

2. Notación y Resultados Previos

En esta sección damos algunos resultados previos y las notaciones que serán usadas en las siguientes secciones.

Siguiendo [6], introducimos una función auxiliar cuya existencia es demostrada en [6].

Proposición 2.1. *Sea ω_0 un subconjunto no vacío de Ω. Entonces, existe $\psi = \psi(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que*

$$\psi > 0\ ,\ en\ \Omega\ \ ;\ \ \psi = 0\ ,\ sobre\ \partial\Omega\ \ ;\ \ |\nabla\psi| \neq 0\ ,\ en\ \ \overline{\Omega\backslash\omega_0}. \tag{2.1}$$

Prueba. Ver [6]. ■

A seguir, introducimos las siguientes funciones

$$\varphi(x,t) = \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{t(T-t)} \quad , \quad \alpha(x,t) = \frac{e^{\lambda\psi(x)} - e^{2\lambda\|\psi\|_{C(\overline{\Omega})}}}{t(T-t)}, \tag{2.2}$$

y, para $\lambda > 1$, definimos los pesos

$$\eta(x,t) = \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{t} \quad \text{y} \quad \widetilde{\eta}(x,t) = \frac{e^{\lambda\psi(x)} - e^{2\lambda\|\psi\|_{C(\overline{\Omega})}}}{t}. \tag{2.3}$$

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} y' - \Delta y + ay + b.\nabla y = h & , \text{ en } Q \\ y = 0 & , \text{ sobre } \Sigma \\ y(0) = y^0 & , \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

donde $h \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ y $y^0 \in L^2(\Omega)$. Entonces, la siguiente desigualdad de Carleman es válida.

Proposición 2.2 (7). *Existe un número $\widehat{\lambda} > 0$, tal que para un número arbitrario $\lambda \geq \widehat{\lambda}$ podemos elegir $s_0(\lambda) > 0$ tal que: existe una constante $C > 0$ tal que para cada $s \geq s_0(\lambda)$, la solución $y \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ del sistema (2.4) satisface la siguiente desigualdad*

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \left(\left(\frac{1}{s\varphi}\right) |\nabla y|^2 + (s\varphi)|y|^2 \right) e^{2s\alpha} dxdt \\ &\leq C\left[\|he^{s\alpha}\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \int_0^T \int_{\omega_0} (s\varphi)|y|^2 e^{2s\alpha} dxdt \right] \end{aligned} \tag{2.5}$$

Aquí, la constante C depende continuamente de λ, $\|a\|_{L^\infty(Q)}$ y $\|b\|_{[L^\infty(Q)]^n}$. Además, ω_0 es el mismo conjunto de (2.1).

6. . ■

Observación: En adelante, supondremos que $\omega \cap \mathcal{O} \neq \phi$. Sea $r > 0$ tal que $B_r \subset \omega \cap \mathcal{O}$. Entonces, tomando $\omega_0 = B_r$ en (2.5) tenemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \left(\left(\frac{1}{s\varphi}\right) |\nabla y|^2 + (s\varphi)|y|^2 \right) e^{2s\alpha} dxdt \\ &\leq C\left[\|he^{s\alpha}\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \int_0^T \int_{B_r} (s\varphi)|y|^2 e^{2s\alpha} dxdt \right] \end{aligned} \tag{2.6}$$

Notación. Denotemos por $\|\ .\ \|_\infty$ la norma tanto en $L^\infty(Q)$ como en $[L^\infty(Q)]^n$, y definamos las constantes

$$\gamma_1 = \|A\|_\infty + \|B\|_\infty\ ,\quad \gamma_2 = \|a\|_\infty + \|b\|_\infty\ ;\quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

y

$$\gamma_0 = \|a\|^2_\infty + \|b\|^2_\infty + \|A\|^2_\infty + \|B\|^2_\infty.$$

3. Resultado Principal

En esta sección, mostraremos una estimativa de tipo Carleman para la solución (p, z) del sistema (1.1)-(1.2) con potenciales limitados a, A, b y B.

Teorema 3.1. *Existen constantes λ', $s' > 1$ y $C > 0$ tales que para cualquier $\lambda > \lambda'$ y $s > s'$ la siguiente estimativa es válida para cualquier solución (p, z) de (1.1)-(1.2) con dato inicial $p^0 \in L^2(\Omega)$*

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{1}{s\varphi} |\nabla z|^2 + (s\varphi) |z|^2 \right) e^{2s\alpha} dxdt \leq C \int_0^T \int_\omega z^2 e^{s\alpha} dxdt. \tag{3.1}$$

Prueba. Procederemos por etapas.
Etapa 1.

Aplicando la desigualdad de Carleman (2.6) a la solución p de (1.1), tenemos para $\lambda > \widehat{\lambda}$ y $s > s_0(\lambda)$

$$\int_Q \left(\frac{1}{s\varphi} |\nabla p|^2 + (s\varphi) |p|^2 \right) e^{2s\alpha} dxdt \leq C_1 \int_0^T \int_{B_r} s\varphi |p|^2 e^{2s\alpha} dxdt. \tag{3.2}$$

donde $\widehat{\lambda}$ y $s_0(\lambda)$ son dadas en la Proposición 2.2.

Etapa 2.

Sea $r_1 > r$, tal que $\overline{B}_{r_1} \subset \omega \cap \mathcal{O}$, y sea $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$ con

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad \xi(x) = 1 \text{ si } x \in B_r, \quad \xi(x) = 0 \text{ si } x \in \Omega \backslash B_{r_1}, \tag{3.3}$$

y tal que

$$\frac{\Delta \xi}{\xi^{1/2}} \in L^\infty(\Omega) \quad , \quad \frac{\nabla \xi}{\xi^{1/2}} \in [L^\infty(\Omega)]^n. \tag{3.4}$$

Introducimos $u = s\varphi e^{2s\alpha}$. Entonces, multiplicamos (1.2) por $u\xi p$ en $L^2(Q)$, e integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned} &\int_Q zu\xi (p' - \Delta p + Ap + B.\nabla p) dxdt + \int_Q zu\xi p (a - A) dxdt - \\ &- \int_Q zp\Delta(u\xi) dxdt - 2\int_Q z\nabla p.\nabla(u\xi) dxdt + \int_Q z\xi pu' dxdt + \\ &+ \int_Q zu\xi (b - B).\nabla p dxdt + \int_Q zpb.\nabla(\xi u) dxdt = \int_Q p^2 u\xi \chi_{\mathcal{O}} dxdt. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Denotemos las siete integrales de (3.5) por $I_1, ..., I_7$ respectivamente, y estimemos cada una de ellas por separado.

Notemos que $I_1 = 0$ pues p es solución de (1.1). Usando las desigualdades de Hölder y Young tenemos

$$I_2 = \int_Q zu\xi p (a - A) dxdt \leq \frac{\delta_1}{2} \int_Q \xi up^2 dxdt + \frac{3\left(\|a\|_\infty^2 + \|A\|_\infty^2\right)}{4\delta_1} \int_Q \xi uz^2 dxdt, \tag{3.6}$$

entonces, como $u = s\varphi e^{2s\alpha}$, $\xi = 0$ en $\Omega \backslash B_{r_1}$ y $0 \leq \xi \leq 1$, tenemos

$$\int_Q zu\xi p (a - A) dxdt \leq \frac{\delta_1}{2} \int_Q \xi up^2 dxdt + C \int_0^T \int_{B_{r_1}} s\varphi z^2 e^{2s\alpha} dxdt. \tag{3.7}$$

donde C es una constante que depende de $\|a\|_\infty$ y $\|A\|_\infty$. Además, δ_1 es una constante a ser elegida más adelante.

Estimemos I_3.

$$I_3 = \int_Q zp\Delta(u\xi)\, dxdt.$$

Observemos que

$$\Delta(u\xi) = u\Delta\xi + 2\nabla\psi.\nabla\xi\left(s\lambda\varphi + 2s^2\lambda\varphi^2\right)e^{2s\alpha} + 2\xi s^2\lambda\varphi^2(\Delta\psi)e^{2s\alpha} + \\ + \xi\left(s\lambda^2\varphi + 6s^2\lambda^2\varphi^2 + 4s^3\lambda^2\varphi^3\right)|\nabla\psi|^2 e^{2s\alpha}$$

entonces

$$I_3 = \int_Q zpu\Delta\xi dxdt + 2\int_Q zp\nabla\psi.\nabla\xi\left(s\lambda\varphi + 2s^2\lambda\varphi^2\right)e^{2s\alpha}dxdt + \tag{3.8}$$

$$+2\int_Q zp\xi s^2\lambda\varphi^2(\Delta\psi)e^{2s\alpha}dxdt + \int_Q zp\xi\left(s\lambda^2\varphi + 6s^2\lambda^2\varphi^2 + 4s^3\lambda^2\varphi^3\right)|\nabla\psi|^2 e^{2s\alpha}dxdt.$$

Escribamos (3.8) como $I_3 = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$. Para estimar cada J_k agrupamos los coeficientes de z y p. Como $\xi = 0$ en $\Omega\backslash B_{r_1}$, usando desigualdades elementales tenemos que

$$J_1 \leq \frac{\delta_2}{2}\int_0^T\int_{B_{r_1}} \xi p^2 udxdt + C\int_0^T\int_{B_{r_1}} z^2 udxdt. \tag{3.9}$$

$$J_2 \leq \frac{\delta_3}{2}\int_0^T\int_{B_{r_1}} \xi p^2 udxdt + C\int_0^T\int_{B_{r_1}} s^2\lambda^2\varphi^2 z^2 udxdt. \tag{3.10}$$

$$J_3 \leq \frac{\delta_4}{2}\int_0^T\int_{B_{r_1}} \xi p^2 udxdt + C\int_0^T\int_{B_{r_1}} s^2\lambda^2\varphi^2 uz^2 dxdt. \tag{3.11}$$

$$J_4 \leq \frac{\delta_5}{2}\int_0^T\int_{B_{r_1}} \xi p^2 udxdt + C\int_0^T\int_{B_{r_1}} \lambda^4 s^4\varphi^4 z^2 udxdt. \tag{3.12}$$

Reemplazando (3.9), (3.10), (3.11) y (3.12) en (3.8) tenemos, para $\lambda \geq \lambda_2$

$$I_3 \leq \frac{\sum\limits_{2\leq i\leq 5}\delta_i}{2}\int_0^T\int_{B_{r_1}} \xi p^2 udxdt + C\int_0^T\int_{B_{r_1}} \lambda^4 s^4\varphi^4 z^2 udxdt,$$

y siendo $u = s\varphi e^{2s\alpha}$ tenemos

$$I_3 \leq \frac{\sum\limits_{2\leq i\leq 5}\delta_i}{2}\int_0^T\int_{B_{r_1}} \xi p^2 udxdt + C\int_0^T\int_{B_{r_1}} \lambda^4 s^5\varphi^5 z^2 e^{2s\alpha}dxdt. \tag{3.13}$$

Con el fin de estimar I_4 agrupamos los coeficientes de z y ∇p para obtener

$$I_4 \leq \frac{\beta_1}{2}\int_0^T\int_\Omega \frac{u\xi|\nabla p|^2}{\lambda(s\varphi)^2}dxdt + C\int_0^T\int_{B_{r_1}} \lambda^3 s^5\varphi^5 z^2 e^{2s\alpha}dxdt. \tag{3.14}$$

Para I_5, observamos que

$$u' = s\varphi' e^{2s\alpha} + 2s^2\varphi e^{2s\alpha}\alpha'.$$

y $|\varphi'| \leq C(T)\varphi^2$. Siguiendo los argumentos anteriores llegamos a

$$I_5 \leq \frac{\delta_6}{2}\int_0^T\int_{B_{r_1}} \xi p^2 u dx dt + C\int_0^T\int_{B_{r_1}} s^3\varphi^5 z^2 e^{2s\alpha} dx dt, \tag{3.15}$$

Análogamente

$$I_6 \leq \frac{\beta_2}{2}\int_0^T\int_\Omega \frac{1}{\lambda(s\varphi)^2}\xi |\nabla p|^2 u dx dt + C\int_0^T\int_{B_{r_1}} \lambda s^3\varphi^3 z^2 e^{2s\alpha} dx dt. \tag{3.16}$$

y

$$I_7 \leq \frac{\delta_7}{2}\int_0^T\int_{B_{r_1}} \xi p^2 u dx dt + C\int_0^T\int_{B_{r_1}} s^3\lambda^2\varphi^3 z^2 e^{2s\alpha} dx dt. \tag{3.17}$$

Reemplazando (3.6), (3.7), (3.13), (3.14), (3.15), (3.16) y (3.17) en (3.5) tenemos

$$\int_0^T\int_{B_{r_1}} \xi p^2 u dx dt \leq \frac{\sum\limits_{1\leq i\leq 7}\delta_i}{2}\int_0^T\int_{B_{r_1}} \xi p^2 u dx dt + \tag{3.18}$$

$$+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\int_0^T\int_\Omega \frac{\xi |\nabla p|^2 u}{\lambda(s\varphi)^2} dx dt + C(1+\gamma_0)\int_0^T\int_{B_{r_1}} s^5\lambda^4\varphi^5 z^2 e^{2s\alpha} dx dt.$$

Ahora, eligiendo $\delta_i > 0$ y $\beta_i > 0$ tales que $\sum\limits_{1\leq i\leq 7}\delta_i = \beta_1+\beta_2 = 1$ concluimos de (3.18) que

$$\int_0^T\int_{B_{r_1}} \xi p^2 u dx dt \leq \int_0^T\int_\Omega \frac{\xi |\nabla p|^2 u}{\lambda(s\varphi)^2} dx dt + C(1+\gamma_0)\int_0^T\int_{B_{r_1}} \lambda^4 s^5\varphi^5 z^2 e^{2s\alpha} dx dt, \tag{3.19}$$

siendo $\gamma_0 = \|A\|_\infty^2 + \|B\|_\infty^2 + \|a\|_\infty^2 + \|b\|_\infty^2$.

Reemplazando $u = s\varphi e^{2s\alpha}$ en (3.19) y como $\xi = 0$ sobre $\Omega\backslash B_{r_1}$, y $\xi(x) = 1$ si $x \in B_r$, llegamos a

$$\int_0^T\int_{B_r} s\varphi p^2 e^{2s\alpha} dx dt \leq \int_0^T\int_{B_{r_1}} \frac{1}{\lambda s\varphi}|\nabla p|^2 e^{2s\alpha} dx dt + \tag{3.20}$$

$$+C(1+\gamma_0)\int_0^T\int_{B_{r_1}} \lambda^4 s^5\varphi^5 z^2 e^{2s\alpha} dx dt.$$

Aplicando (3.20) en (3.2) obtenemos

$$\int_0^T\int_\Omega \left(\frac{1}{s\varphi}|\nabla p|^2 + (s\varphi)|p|^2\right) e^{2s\alpha} dx dt \leq C_1\left[\int_0^T\int_{B_{r_1}} \frac{|\nabla p|^2}{\lambda s\varphi} e^{2s\alpha} dx dt + \right. \tag{3.21}$$

$$\left. +C(1+\gamma_0)\int_0^T\int_{B_{r_1}} \lambda^4 s^5\varphi^5 z^2 e^{2s\alpha} dx dt\right].$$

Entonces

$$\left(1-\frac{C_1}{\lambda}\right)\int_0^T\int_\Omega \frac{1}{s\varphi}|\nabla p|^2 e^{2s\alpha} dx dt + \int_0^T\int_\Omega (s\varphi)|p|^2 e^{2s\alpha} dx dt \leq$$

$$\leq C(1+\gamma_0)\int_0^T\int_{B_{r_1}} s^5\lambda^4\varphi^5 z^2 e^{2s\alpha} dx dt.$$

En consecuencia, para $\lambda \geq \lambda_3 = \text{máx}\{\lambda_2, C_1\}$ tenemos, para cualquier $\lambda \geq \lambda_3$ y $s \geq s(\lambda)$

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{1}{s\varphi} |\nabla p|^2 + (s\varphi)|p|^2 \right) e^{2s\alpha} dx dt \leq C(1+\gamma_0) \int_0^T \int_{B_{r_1}} \lambda^4 s^5 \varphi^5 z^2 e^{2s\alpha} dx dt. \tag{3.22}$$

Etapa 3.

Aplicando la desigualdad de Carleman (2.5) a la solución z de (1.2) tenemos

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{1}{s\varphi} |\nabla z|^2 + (s\varphi)|z|^2 \right) e^{2s\alpha} dx dt \leq \tag{3.23}$$

$$\leq C_1 \left(\|p\chi_{\mathcal{O}} e^{s\alpha}\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \int_0^T \int_{B_{r_1}} (s\varphi) z^2 e^{2s\alpha} dx dt \right).$$

Por la continuidad de la inmersión $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ se tiene

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{1}{s\varphi} |\nabla z|^2 + (s\varphi)|z|^2 \right) e^{2s\alpha} dx dt \leq \tag{3.24}$$

$$\leq C \left(\int_0^T \int_{\mathcal{O}} (s\varphi) p^2 e^{2s\alpha} dx dt + \int_0^T \int_{B_{r_1}} (s\varphi) z^2 e^{2s\alpha} dx dt \right).$$

Aplicando la desigualdad (3.22) en (3.24) concluimos que

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{1}{s\varphi} |\nabla z|^2 + (s\varphi)|z|^2 \right) e^{2s\alpha} dx dt \leq \tag{3.25}$$

$$\leq C(1+\gamma_0) \int_0^T \int_{B_{r_1}} \lambda^4 s^5 \varphi^5 z^2 e^{2s\alpha} dx dt + C \int_0^T \int_{B_{r_1}} (s\varphi) z^2 e^{2s\alpha} dx dt.$$

Entonces, la desigualdad (3.1) es una consecuencia inmediata de (3.25) y el siguiente resultado técnico. ■

Lema 3.1. *Sea $\lambda \geq \lambda_3$, entonces existe $s' = s'(\lambda) > 1$ tal que para $s > s'$ se tiene*

$$\lambda^4 s^5 \varphi^5 e^{s\alpha} \leq 1 \quad y \quad s\varphi e^{s\alpha} \leq 1.$$

Agradecimiento. El autor desea agradecer al Profesor L. A. Medeiros por las conversaciones que tuvimos en relación al presente trabajo.

REFERENCES

[1] O. BODART y C. FABRE, Controls insensitizing the norm of the solution of a semilinear heat equation. *J. Math. Anal. and Appl.*, 195, (1995), pp. 658-683.

[2] V. CABANILLAS, Insensitizing Controls for a Semilinear Heat Equation Involving Gradient Terms, *Proceeding of* 53^0 *SBA*. UEM. 2001.

[3] V. CABANILLAS, Insensitizing Controls for a Semilinear Heat Equation in Unbounded Domains, *Proceeding of* 54^0 *SBA*, UNESP, 2001.

[4] V. CABANILLAS, S. MENEZES y E. ZUAZUA, Null controllability in unbounded domains for the semilinear heat equations with nonlinearities involving gradient terms. , *J. Optim. Theory Applications*, 110 (2) (2001).

[5] C. FABRE, J. P. PUEL y E. ZUAZUA, Approximate controllability of the semilinear heat equation. *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 125A, (1995), pp. 31-61.

[6] A. FURSIKOV y O. Yu. IMANUVILOV , *Controllability of evolution equations.* Lecture Notes Series #34, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul National University, (1996).

[7] O. Yu. IMANUVILOV e M. YAMAMOTO . On Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations. Preprint # 98-46, *University of Tokyo. Graduate School of Mathematics*, Tokyo, Japan, (1998).

[8] L. de TERESA, Insensitizing controls for a semilinear heat equation. *Comm. in Partial Diff. Equations 25 (1&2)*, (2000), pp 39-72.

[9] E. ZUAZUA, Finite dimensional null controllability for the semilinear heat equation. *J. Math. Pures Appl., 76*, (1997), pp. 237-264.