PESQUIMAT, Revista de la F.C.M. de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Vol. XII N°2, pp. 22-31, Lima - Perú. Agosto 2009

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE UN MODELO DE PLACAS SEMILINEAL CON DISIPACIÓN LOCALMENTE DISTRIBUIDO

Alfonso Perez Salvatierra[1], *Eugenio Cabanillas Lapa*[2], *Raúl Izaguirre Maguiña*[3], *Victoriano Yauri Luque*[4], *Andrés Guardia Cayo*[5], & *Víctor Carrera Barrantes*[6]

Resumen: Se estudia el decaimiento uniforme de la energía asociada a un modelo de placas semilineal, con disipación localmente distribuido, empleando el principio de la continuación única, estudiado por Ruiz [9] y aplicados a trabajos con disipación localmente distribuida por Zuazua [10].
Palabras clave: Comportamiento asintótico-Continuación única-Modelo de Placa-Decaimiento exponencial.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF MODEL OF PLATE SEMILINEAR WITH DISSIPATION DISTRIBUTED LOCALLY

Abstract: We evaluate the uniform decay of the energy associated with a model semilineal plates, with dissipation distributed locally, using the principle of continuation single result studied by Ruiz [9] and applied to work with locally distributed by Zuazua dissipation [10].
Key words: Asympthotic behavior-Unique continuation-More Single-Model Plate-Exponential decay.

1. Introducción

Las oscilaciones de una membrana elástica sujeta en los extremos, bajo fuentes disipativas con condiciones de frontera mixto Dirichlet y Newman, dan como resultado al sistema $(*)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio regular.

Inicialmente en 1980, se tiene el estudio de la ecuación de la onda no lineal con $\Omega = \mathbb{R}^n$, y condiciones de Dirichlet ver [13]. Por los años 90, se estudian con mayor énfasis los sistemas localmente distribuidos. Actualmente se estudian modelos de placas semilineales con disipación en la frontera ver [1,2,3,4,5,6]. Trabajos con disipación en una vecindad de la frontera, ecuaciones de la onda podemos ver en [2], [5], ecuación de Kirchoff [6], ecuación de Von Karmann en abierto, materiales termoplásticos [1], ecuaciones de la placa con disipación localizada no lineal [12].

El presente trabajo, lo trataremos usando el método de Continuación Única que está en abierto.

[1]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: apersal@hotmail.com
[2]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: cleugenio@yahoo.com
[3]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: raul_izaguirre2222@yahoo.es
[4]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: victoriano_yauri@hotmail.com
[5]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: agcdibayo@yahoo.es
[6]UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas, e-mail: vcarrerab@yahoo.com

2. Preliminares

En esta sección plantearemos las hipótesis y algunos resultados necesarios para el desarrollo del presente trabajo.

1) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio, acotado con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ de clase C^3.

2) $a(x) \in L^\infty_+(\Omega)$, $a(x) \geq a_0 > 0$ c.s. en ω, donde $\omega \subseteq \Omega$ es una vecindad de $\Gamma = \partial\Omega$

3) f es tal que $f(s)s \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}$ y además f es super lineal, es decir, $\exists\delta > 0$ tal que $f(s)s \geq (2+\delta)F(s); \forall s \in \mathbb{R}$, donde

$$F(s) = \int_0^s f(z)\,d(z) \geq 0,$$

pues $f(s)s \geq 0; \forall s \in \mathbb{R}$.

4) Principio de la continuación única, para sistemas de placas dadas por:
Sean $b \in L^\infty(\omega \times (0,T))$, $w \in H^2(\Omega \times (0,T))$ tal que w satisface:

$$\left|\begin{array}{lll} w_{tt} + \Delta^2 w + b(x,t)\,w = 0 & \text{en} & \Omega \times (0,T) \\ w = \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre} & \Gamma \times (0,T) \\ w = 0 & \text{c.s. en} & \omega \times (0,T) \end{array}\right.$$

entonces $w = 0$ en $\Omega \times (0,T)$.
Proyecto estudiado por el Mg. Claudio Balcazar Huapaya.

5) Sea un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fijo se tiene que $\partial\Omega = \Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$, donde

$$\bar{\Gamma}_0 = \{x \in \Gamma / m(x)\,\nu(x) > 0\}, \quad \bar{\Gamma}_1 = \{x \in \Gamma / m(x)\,\nu(x) < 0\}$$

con $m(x) = x - x_0$, $\nu(x)$ normal unitario en un punto $x \in \Gamma$.

Con estas hipótesis dadas de (1) a (5) se estudia el comportamiento asintótico del sistema siguiente

$$(*)\left|\begin{array}{lll} u_{tt} + \Delta^2 u + f(u) + a(x)\,u_t = 0 & \text{en} & \Omega \times (0,+\infty) \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre} & \Gamma \times (0,+\infty) \\ u(0) = u^0 \in H_0^2(\Omega),\ u_t(0) = u^1 \in L^2(\Omega) & \text{en} & \Omega \end{array}\right.$$

Con datos iniciales $\{u^0, u^1\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, de donde existe una única solución débil de $(*)$ en la clase $u \in C([0,+\infty); H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0,+\infty); L^2(\Omega))$; lo cual se puede obtener utilizando los métodos de Faedo-Galerkin o el método de semigrupos de operadores lineales. Podemos ver las aplicaciones de estos modelos a la física en Pérez [1], Komornikof [4], Portillo [5], Cabanillas [6].

Se define la energía asociada al sistema $(*)$ como:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|u_t(x,t)|^2 + |\Delta u_t(x,t)|^2\,dx + \int_\Omega F(u(x,t))\,dx\right];$$

El objetivo del presente trabajo es obtener el decaimiento exponencial uniforme de la energía, asociado al sistema $(*)$, esto es,

$$\exists\, C, \gamma > 0 \ \text{ tal que } \ E(t) \leq Ce^{-\gamma t}, \forall\, t \in (0,+\infty).$$

Deducción formal de la energía :

Multiplicando al sistema (∗) por u_t, se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}|u_t|^2+\frac{1}{2}|\triangle u|^2+\int_\Omega F(u)\,dx\right\}=-\int_\Omega a(x)|u_t|^2\,dx,$$

de donde definimos la energía por,

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left[|u_t(x,t)|^2+|\triangle u(x,t)|^2\right]dx+\int_\Omega F(u(x,t))\,dx; \tag{6}$$

de la hipótesis (2) se tiene que $\int_\Omega a(x)|u_t|^2\,dx>0$, entonces

$$\frac{d}{dx}E(t)<0,\forall t\in(0,+\infty), \tag{7}$$

esto es, la energía dado en (6) es decreciente en $(0,+\infty)$.

Usando la técnica de los multiplicadores se obtiene la estimativa de la energía siguiente: Para $T>0$ suficientemente grande;

$$E(T)\le C\left\{\int_0^T\int_\Omega a(x)|u_t(x,t)|^2\,dx\,dt+\int_0^T\int_\Omega|u(x,t)|^2\,dx\,dt\right\} \tag{8}$$

Usando técnica de la continuación única pasmado en (4) se obtiene la estimativa.

$$\int_0^T\int_\Omega|u_t(x,t)|^2\,dx\,dt\le C\int_0^T\int_\Omega a(x)|u(x,t)|^2\,dx\,dt. \tag{9}$$

Combinando (8) y (9) se obtiene que: $\exists C>0$ tal que

$$E(T)\le C\int_0^T\int_\Omega a(x)|u(x,t)|^2\,dx\,dt \tag{10}$$

De (10) y propiedad de semigrupo se obtiene el teorema central, el decaimiento exponencial, es decir,

$$\exists\, C,\gamma>0 \text{ tal que } E(t)\le CE(0)^{-\gamma t}. \tag{11}$$

Los métodos y resultados seguidos son:

1) Técnica de los multiplicadores:

Sirvió para obtener la energía y otras estimativas para la energía.

2) Técnicas de las desigualdades integrales:

Sirvió para obtener estimados de la integral de la energía como es,

$$C_1\int_0^T E(t)\,dt\le\int_{d\Sigma}|m\cdot v|\left|\left[|\triangle u|^2+F(u)\right]\right|d\Sigma+|\hat{x}|+\int_\Omega|(a(x)u)\,m\cdot\nabla u_t|\,dx\,dt$$

donde

$$|\hat{x}|=\left(\int_\Omega\left\{(u_t+a(x)u)\,m\cdot\nabla+r\,u\left(u_t+\frac{a(x)u}{2}\right)\right\}dx\right]_0^t$$

3) Técnica de la continuación única:

Nos sirvió para estimar el término (9).

4) Usando propiedades de semigrupo, finalmente obtenemos el decaimiento de la energía dado por (11).

Desarrollando algunos lemas y proposiciones previos al teorema principal del trabajo se tienen: Para $\Omega \in \mathbb{R}^n$ abieto regular de clase C^2, consideremos la ecuación de la placa no homogénea:

$$(\hat{*})\left|\begin{array}{lll} \theta'' + \triangle^2\theta = f & \text{en} & \Omega \times [0,T] = Q \\ \theta = \dfrac{\partial\theta}{\partial\nu} = 0 & \text{sobre} & \Gamma \times [0,T] = \Sigma \\ \theta(0) = \theta^0, \quad \theta'(0) = \theta^1 & \text{en} & \Omega \end{array}\right.$$

Lema 1. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Γ regular y $q = (q_k)$ un campo vectorial de clase $\left[C^1\left(\bar{\Omega}\right)\right]^n$. Entonces, para toda solución débil.

θ de $(*)$ y $\left\{\theta^0, \theta^1\right\} \in H_0^2(\Omega)$, se tiene la siguiente identidad:

$$\int_Q f q \cdot \nabla\theta dx = \left(\int_\Omega \theta' q \cdot \nabla\theta dx\right]_0^\Gamma + \frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div}(q)\left|\theta'\right|^2 dx\, dt +$$
$$+ \int_Q \left[\frac{\partial}{\partial x_k}(\theta) \triangle(\theta) \triangle(q_k) + q_k \triangle(\theta) \triangle\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right] dxdt.$$

Demostración.
Multiplicando$(\hat{*})$ por $q_k \dfrac{\partial\theta}{\partial x_k}$ e integrando de 0 a T, usando el teorema de Green se tiene el lema 1.

Lema 2. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, como frontera Γ regular y $q = (q_k) \in \left[W^{1,+\infty}(\Omega)\right]^n$, entonces para cada solución débil u de $(*)$ se verifica la siguiente identidad,

$$\left(\int_\Omega (a(x)u + u_t) q \cdot \nabla u dx\right]_0^T + \int_Q \operatorname{div}(q) F(u) dx\, dt = -\frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div}(q)\left|u_t\right|^2 dxdt$$
$$+ \int_Q a(x) u q \cdot \nabla(u_t) dxdt$$
$$- \int_Q \left[\frac{\partial u}{\partial x_k} \triangle(u) \triangle(q_k) + q_k \triangle(u) \triangle\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\right] dxdt$$
$$- \int_\Sigma q \cdot v F(u) d\Sigma$$

Demostración.
Multiplicando el sistema $(*)$ por $q \cdot \nabla u$, lema 1 y $F'(s) = f(s)$ se obtiene el lema 2.

Lema 3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio acotado, con frontera Γ de clase $C^3; x_0 \in \mathbb{R}^n$ fijo y sea $m(x) = x - x_0$; entonces se tiene:

$$\left(\int_\Omega (a(x)u + u_t) m \cdot \nabla u dx\right]_0^\Gamma + n\int_Q F(u) dxdt + \frac{n}{2}\int_Q \left|u_t\right|^2 dxdt + \frac{n}{2}\int_Q \left|\triangle u\right|^2 dxdt -$$
$$- \int_Q a(x) u\, m \cdot \nabla(u_t) dxdt = -\int_\Sigma m \cdot v F(u) d\Sigma +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_\Sigma m \cdot v \left|\triangle u\right|^2 d\Sigma.$$

Demostración.
En el lema 2 considerar $q(x) = x - x_0 = m(x)$ y aplicando el lema de Green, se obtiene el lema 3.

Lema 4. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, con frontera Γ regular, entonces para cada u solución débil de $(*)$, se tiene:

$$\left(\int_\Omega u\left(u_t + \frac{a(x)\,u}{2}\right)dx\right]_0^T = \int_Q \left(|u_t|^2 - |\triangle u|^2\right) dx\,dt - \int_Q u f(u)\,dx\,dt$$

Demostración.
Considerando $\xi \in W^{1,+\infty}(\Omega)$. Multiplicando a la ecuación $(*)$ por ξu, con u solución débil y luego tomando $\xi = 1 \in W^{1,+\infty}(\Omega)$ se obtiene el lema 4.

Proposición 1. Considerando las hipótesis del lema 3 y la hipótesis dadas en (4), se tiene que existe $C_1 > 0$ constante tal que,

$$C_1 \int_0^T E(t)\,dt \leq |\hat{x}| + \int_Q a(x)\,|u|\,|m\cdot\nabla(u_t)|\,dx\,dt + \int_\Sigma |m\cdot v|\,|F(u)|\,d\sum + \int_\Sigma |m\cdot v|\,|\triangle u|^2\,d\Sigma$$

donde

$$|\hat{x}| = \left(\int_\Omega \left\{(a(x)\,u + u_t)\,m\cdot\nabla u + ru\left(u_t + \frac{a(x)\,u}{2}\right)\right\}dx\right]_0^T$$

Demostración.
Del lema 4, multiplicando por $r > 0$:

$$r\int_Q |\triangle u|^2\,dx\,dt + \left(\int_\Omega r\,u\left(u_t + \frac{a(x)\,u}{2}\right)\right]_0^T = r\int_Q |u_t|^2\,dx\,dt - r\int_Q uf(u)\,dx\,dt.$$

Sumando la identidad precedente al resultado del lema 3:

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega (a(x)\,u + u_t)\,m\cdot\nabla u dx\right]_0^T &+ n\int_Q F(u)\,dxdt + \frac{n}{2}\int_Q |u_t|^2\,dxdt - \\
&- \int_Q a(x)\,um\cdot\nabla(u_t)\,dxdt + \frac{n}{2}\int_Q |\triangle u|^2\,dxdt \\
&+ r\int_Q |\triangle u|^2 + \left(\int_\Omega ru\left(u_t + \frac{a(x)\,u}{2}\right)dx\right]_0^T = \int_Q |u_t|^2\,dx\,dt \\
&- r\int_Q u\;f(u)\,dxdt - \int_\Sigma m\cdot v\;F(u)\,d\Sigma + \frac{1}{2}\int_\Sigma m\cdot v\,|\triangle u|^2\,d\Sigma
\end{aligned}$$

Reordenando

$$\begin{aligned}
n\int_Q F(u)\,dxdt &+ \left(\int_\Omega (a(x)\,u + u_t)\,m\cdot\nabla u + r\,u\left(u_t + \frac{a(x)\,u}{2}\right)\right]_0^T \\
&+ \left(\frac{n}{2} - r\right)\int_Q |u_t|^2\,dx\,dt + \left(\frac{n}{2} + r\right)\int_Q |\triangle u|^2\,dx\,dt \\
&+ r\int_Q uf(u)\,dx\,dt = \int_Q a(x)\,um\cdot\nabla(u_t)\,dx\,dt + \\
&\qquad + \int_\Sigma \frac{m\cdot v}{2}\left[|\triangle u|^2 - F(u)\right]d\Sigma
\end{aligned} \tag{12}$$

Definimos:

$$\hat{x} = \left(\int_{\Omega} (a(x)\, u + u_t)\, m \cdot \nabla u + r\, u \left(u_t + \frac{a(x)\, u}{2} \right) \right]_0^T$$

Tomando $r > 0$ tal que $\dfrac{n-2}{2} < r < \dfrac{n}{2}$, entonces $0 < \dfrac{n}{2} - r$ y $r - \dfrac{n-2}{2} > 0$ luego, $r - \frac{n}{2} + 1 > 0$ de donde resulta $r + 1 > \frac{n}{2}$. Observemos que $\forall \gamma \geq 2n$ se obtiene,

$$r < \frac{\gamma - n}{2} \text{ entonces } 0 < \frac{\gamma - n}{r} - 2$$

definimos $\delta = \dfrac{r-n}{r} - 2$
se tiene que:

$$sf(s) \geq (2+\delta)\, F(s) = \left(\frac{\gamma - n}{r} - 2 \right) F(s) = \left(\frac{\gamma - n}{r} \right) F(s),$$

esto es,

$$s\, r\, f(s) \geq (\gamma - n)\, F(s), \; \gamma - n > 0;$$

por tanto,

$$\forall \gamma \geq 2n,\; r \int_Q u\, f(u)\, dx\, dt \geq (\gamma - n) \int_Q F(u)\, dx\, dt \tag{13}$$

Luego; de (13), definición de $\hat{x}$ en (12), mayorando por el lado izquierdo, obtenemos:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{n}{2} - r \right) \int_Q |u_t|^2\, dxdt + \left(\frac{n}{2} + r \right) \int_Q |\triangle u|^2\, dxdt + \\ &+ \gamma \int_Q F(u)\, dxdt \leq -\hat{x} + \int_Q a(x)\, u\, m \nabla (u_t)\, dx\, dt + \int_{\Sigma} \frac{m \cdot v}{2} \left[|\triangle u|^2 - F(u) \right] d\Sigma. \end{aligned}$$

Elijamos $C_1 = \text{mín}\{n - 2r, n + 2r + \gamma\}$ y la definición de la energía asociada al sistema $(*)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} C_1 \int_0^T E(t)\, dt &\leq -\hat{x} + \int_Q a(x)\, u\, m \cdot \nabla (u_t)\, dx\, dt + \int_{\sum} \frac{m \cdot v}{2} \left[|\triangle u|^2 - F(u) \right] d\Sigma \\ &\leq |\hat{x}| + \int_Q a(x)\, |u|\, |m \cdot \nabla (u_t)|\, dxdt + \int_{\Sigma} |m \cdot v|\, |\triangle u|^2\, d\Sigma \\ &+ \int_Q |m \cdot v|\, |F(u)|\, d\Sigma \end{aligned}$$

y se tiene la proposición 1.

Lema 5. Con la hipótesis como en lemas anteriores se tiene:

$$\begin{aligned} &|\hat{x}| + \int_Q a(x)\, |u|\, |m \cdot \nabla (u_t)|\, dxdt + \int_{\Sigma} |m \cdot v|\, |\triangle u|^2\, d\Sigma \\ &+ \int_Q |m \cdot v|\, |F(u)|\, d\Sigma \leq C_2 \left[2E(T) + \hat{K} \int_Q |u|^2\, dxdt + \int_Q a(x)\, |u_t|^2\, dxdt \right] \end{aligned}$$

Demostración.
Siguiendo el método de la prueba del lema 2.a Cap. VII J:L: Lion[11], se sigue el lema 5.

Proposición 2. Con las hipótesis como en los lemas anteriores, se tiene:

$$E(t) \leq K \left[\int_Q a(x)\, |u_t|^2\, dx\, dt + \int_Q |u|^2\, dx\, dt + \right], \; K \text{constante positiva.}$$

Demostración.
Del lema 5 en la proposición 1:

$$C_1 \int_0^T E(t)\,dt \leq C_2 \left[2E(t) + \hat{K} \int_Q |u|^2\,dx\,dt + \int_Q a(x)\,|u_t|^2\,dx\,dt \right]. \tag{14}$$

Desde que la energía es no decreciente, es decir,

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_\Omega a(x)\,|u_t|^2\,dx\,dt < 0, \forall t \geq 0.$$

entonces,

$$TE(T) \leq \int_0^T E(t)\,dt \tag{15}$$

Luego, de (15) en (14):

$$TE(T) \leq \int_0^T E(t)\,dt \leq \frac{C_2}{C_1} \left[2E(T) + \hat{K} \int_Q |u|^2\,dx\,dt + \int_Q a(x)\,|u_t|^2\,dx\,dt \right]$$

de donde

$$\begin{aligned}\left(T - \frac{2C_2}{C_1} \right) E(T) &\leq \frac{C_2}{C_1} \left[\hat{K} \int_Q |U|^2\,dx\,dt + \int_Q a(x)\,|u_t|^2\,dx\,dt \right] \\ &\leq \frac{C_2}{C_1}\hat{K} \left[\int_Q |u|^2\,dx\,dt + \int_Q a(x)\,|u_t|^2\,dx\,dt \right], \ \hat{K} > 1.\end{aligned}$$

Considerando $K = \dfrac{C_2\hat{K}}{TC_1 - 2C_2}$, para T suficientemente grande tal que $TC_1 - 2C_2 > 0$, se tiene la proposición 2.

Proposición 3. Con las hipótesis dadas de (1) - (5) se tiene que,

$$\int_Q |u|^2\,dx\,dt \leq C \int_Q a(x)\,|u_t|^2\,dx\,dt$$

Demostración.
Siguiendo un procedimiento análogo como el teorema 2.1 Enrike Zuazua [10], es decir, razonando por el absurdo y aplicando el principio de continuación única para modelos de placa hipotésis (4) se tiene el resultado.

3. Teorema Central

Ahora enunciaremos el resultado principal de este trabajo.
Teorema 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio acotado con frontera Γ de clase $C^3, a(x)$, f y F con las hipótesis dadas del (1) al (5). Entonces, existen constantes $c > 1, \gamma > 0$ tal que,

$$E(t) \leq Ce^{-\gamma t}E(0), \forall T \geq 0$$

Para toda solución u débil de $(*)$ con datos iniciales

$$\{u^0, u^1\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

Demostración.
De la proposición 3 en proposición 2

$$E(T) \leq K_0 \int_0 \int_\Omega a(x) |u_t|^2 \, dx \, dt, \; K_0 = \text{máx } \{ \ \} \tag{16}$$

Se deduce que, para $0 < t_1 < t_2$ en la energía:

$$E(t_2) - E(t_1) = -\int_1^2 \int_\Omega a(x) |u_t|^2 \, dxdt, \text{ haciendo } T = t_2, \; t_1 = 0$$

obtenemos,

$$E(T) - E(0) = -\int_0^T \int_\Omega a(x) |u_t|^2 \, dxdt \tag{17}$$

De (16) y (17):

$$E(T) - E(0) = -\int_0^T \int_\Omega a(x) |u_t|^2 \, dx \, dt \geq \frac{E(T)}{K_0}$$

de donde

$$\left(1 + \frac{1}{K_0}\right) E(T) \leq E(0)$$

por tanto

$$E(T) \leq \left(\frac{K_0}{1 + K_0}\right) E(0)$$

sea $C = \dfrac{K_0}{1 + K_0} < 1$ y $T > 0$, entonces $E(T)$ es acotado en todo intervalo finito $[0, T]$, por tanto,

$$E(T) \leq \left(\frac{K_0}{1 + K_0}\right) E(0).$$

Ahora usando la propiedad de semigrupo obtenemos:
Afirmación.

$$E(T) \leq \left(\frac{1 + K_0}{K_0}\right) E(0) e^{-\gamma t}, \text{ donde } \gamma = \frac{1}{T}\text{Ln}\left(\frac{1 + K_0}{K_0}\right) > 0 \text{ y } C = 1 + \frac{1}{K_0} > 0$$

En efecto,

$$E(T) \leq \left(\frac{K_0}{1 + K_0}\right) E(0)$$

Para un tiempo $2T$,

$$E(2T) \leq \left(\frac{K_0}{1 + K_0}\right) E(T) \leq \left(\frac{K_0}{1 + K_0}\right)^2 E(0).$$

Para un tiempo $3T$,

$$E(3T) \leq \left(\frac{K_0}{1 + K_0}\right) E(2T) \leq \left(\frac{K_0}{1 + K_0}\right)^3 E(0).$$

Entonces, por recurrencia para un tiempo $nT, n \in \mathbb{Z}^+$

$$E(nT) \leq \left(\frac{K_0}{1 + K_0}\right)^n E(0)$$

Para t cualquiera y T fijo, existen $n \in \mathbb{Z}^+$, $r \in \mathbb{Z}$ tal que $t = nT + r$ (Algoritmo de la división) entonces $nT = t - r$, tomando $s = nT = t - r$ o equivalentemente $n = \frac{s}{t}$, obtenemos

$$E(s) \leq \left(\frac{K_0}{1+K_0}\right)^{\frac{s}{t}} E(0) \leq \left(\frac{K_0}{1+K_0}\right)^{\frac{s}{t}} \left(\frac{1+K_0}{K_0}\right) E(0) = \left(\frac{1+K_0}{K_0}\right) E(0)\, e^{-\frac{1}{t}\mathrm{Ln}\left(\frac{1+K_0}{1+K_0}\right)s}$$

por consiguiente, tomando

$$\gamma = \frac{1}{T}\mathrm{Ln}\left(\frac{1+K_0}{K_0}\right) > 0 \ \text{ y } \ C = \frac{1+K_0}{K_0} > 1, s = t \geq 0;$$

obtenemos

$$E(t) \leq C\ E(0)\, e^{-\gamma t},\ \forall t \geq 0$$

4. Conclusiones

El método que se ha seguido para obtener el decaimiento exponencial del sistema dado en $(*)$, es usando el principio de la continuación única, dado en preliminares (4). Este método también, puede adaptarse a otros sistemas donde se puede variar aumentando otros términos en la ecuación y/o, otros datos en la frontera, es decir, es posible aplicar este método a otros modelos, como son: Von Karman con condiciones de disipación en la frontera, placas con condiciones mixtas en la frontera de tipo Dirichlet-Newmann, sistemas de transmisión con memoria en las condiciones de frontera, etc., que podrían ser materias de estudios posteriormente.

El método utilizado es una de las múltiples maneras de poder obtener el decaimiento exponencial de la energía, pues existe otros métodos como son: El método seguido por Haraux, Liapunotv, perturbaciones de la energía, etc.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] PÉREZ SALVATIERRA, A. , *Decaimiento de soluciones de equacoes parcialmente viscoélasticos. Tesis doctorado UFRJ. Brasil,* 1997.

[2] PÉREZ SALVATIERRA, A. , *Comportamiento de la ecuación de onda con potencial y amortiguamiento localmente distribuido. Proy Inv. Rev Pesquimat.*2003.

[3] CABANILLAS LAPA E. , *Estabilización de la energía para una ecuación de Kirchoff con disipación localizada. Proy Inv ,UNMSM,* 2004. Lima-Perú

[4] KOMORNIK, V. , *Exact controllability in short time for the wave equation, Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Nonlinéaire 6,* 1989, pág. 153-164.

[5] PORTILLO OQUENDO H. MUÑOZ J. *Sobre un problema de contato unidimensional de ondas elásticas localmente amortecidas SBA. 46º Seminario Brasileiro de Análise,* 1997.

[6] CABANILLAS LAPA E. , *Estabilización de la energía para una ecuación de Kirchoff con disipación localizada. Inst Inv.,* 1994. UNMSM.

[7] KOMORNIK, V, AND ZUAZUA, E, *A direct method for boundary stabilization of the wave equation, J. Math Pure et Apll.* 69,pág.33 - 54. 1990

[8] LASIECKA, I., *Global uniform decay rates for the solution to the wave equation with nonlinear boundary conditions. Applicable Analysis Vol. 47 pp. 191-212,* 1992.

[9] RUIZ A., *Unique continuation for weak solution of the wave equation plus a potencial Jornal Math pure Applicada 71, 1992 pag. 455-467*

[10] ZUAZUA ENRIKE, *Exponential Decay ffor the semilinear wave equation with locally distribuited damping. Comm PDE 15, pp 205-235.*1990.

[11] LIONS, J.L, *Controlabilité Exacte, Perturbation et Stabilization des Systémes Distribuées, Vol. 1 y II, Masson, París,* 1998.

[12] LIONS, J.L., *Quélques Méthodes de resolution de Problémes aux Limites non Lineares. Dunod Gauthiers Villars, París,* 1969.