UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOS DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

ESCUELA ACADÉMICA PROFESIONAL DE ESTADÍSTICA

MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS PARA LA ESTIMACIÓN DE LOS MODELOS LINEALES GENERALIZADOS

Tesis para optar el Título Profesional de
Licenciada en Estadística

Karin Cecilia Gonzales King-keé

Lima – Perú
2001

FICHA CATALOGRAFICA

GONZALES KING-KEÉ KARIN CECILIA

Estimación de Mínimos Cuadrados Ponderados en los Modelos Lineales Generalizados. (Lima) 2001.

XII, 98p., 29.7 cm, UNMSM, Licenciada, Estadística, 2001.

Tesis Universidad Nacional Mayor de San Marcos,
Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Estadística
I. UNMSM/FdeCMII.Estimación de Mínimos Cuadrados Ponderados en los Modelos Lineales Generalizados.

<u>MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS PARA LA ESTIMACIÓN DE LOS MODELOS LINEALES GENERALIZADOS</u>

Karin Cecilia Gonzales King-keé

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Estadística.

Aprobada por:

....
Emma Cambillo Moyano

....
Mg. Ysela Agüero Palacios

....
Lic. Caridad Huaroto Sumari

LIMA – PERÚ
Octubre – 2001

RESUMEN

ESTIMACIÓN DE MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS EN LOS MODELOS LINEALES GENERALIZADOS

KARIN CECILIA GONZALES KING-KEÉ

OCTUBRE – 2001

Orientador : Mg. Ysela Agüero Palacios.
Título obtenido : Licenciado en Estadística.

En este trabajo se aplica el método de Mínimos Cuadrados Ponderados como un método alternativo de estimación de parámetros en los Modelos Lineales Generalizados, y en particular para el caso de variables respuesta con distribución Multinomial y de Poisson, usando el enfoque desarrollado por Grizzme, Starmer y Koch (GSK).

Se estudia la formación de funciones respuesta de variables dependientes con distribución Multinomial y Poisson.

PALABRAS CLAVES:

MODELOS LINEALES GENERALIZADOS
MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS
FUNCIÓN RESPUESTA
FUNCIÓN DE ENLACE
MÁXIMA VEROSIMILITUD
FUNCIÓN LINEAL
FUNCIÓN LOGARÍTMICA
MATRIZ DE DISEÑO

ABSTRACT

ESTIMATE OF WEIGHTED LEAST SQUARES IN THE GENERALIZED LINEAR MODELS

KARIN CECILIA GONZALES KING-KEÉ

OCTOBER – 2001

Tutor	**: Mg. Ysela Agüero Palacios.**
Academic degree	**: Licenciado en Estadística.**

In this work the metod of weighted least squares is applied as an alternative for estimating parameters in the Generalized Linear Models, and particularly, for the case of response variable with multimomial and Poisson distributions using the theory developed by Grizzme, Starmer y Koch.

Beginning with the General linear model it is introduced the Generalized linear models and it is stablished the funtion formations for the response variables with multinomial and poisson distributions.

PALABRAS CLAVES:

GENERALIZED LINEAR MODEL
WEIGHTED LEAST SQUARES
RESPONSE FUNTION
LINK FUNTION
MAXIMUM LIKELIHOOD
LINEAR FUNTION
LOGARITHMIC FUNTION
DESIGN MATRIZ

INDICE

INTRODUCCION

En las diferentes áreas de investigación, muchas veces, surge la necesidad de cuantificar relaciones entre variables en un intento de “explicar” el comportamiento de una de ellas en función de las otras. Este tipo de análisis generalmente se hace utilizando los modelos lineales y en particular los modelos de regresión y de análisis de varianza. Esta clase de modelos suponen que la variable respuesta es siempre continua, y en general normalmente distribuida con media y varianza constante.

Sin embargo, cuando la variable respuesta es discreta o categórica, el modelo lineal ya no funciona. Ante esta limitación, Nelder y Wedderburn extendieron la teoría de los modelos lineales a una familia más amplia, a la que denominaron **Modelos Lineales Generalizados**. Esta familia considera a todas las funciones de distribución que pertenecen a la familia exponencial, a la cual pertenece la distribución normal.

El objetivo de este trabajo es utilizar el método de **Mínimos Cuadrados Ponderados** para estimar los parámetros de modelos en los cuales la variable respuesta tiene distribución poisson o multinomial. El enfoque que se usará se denomina **GSK** ty fue propuesto por Grizzle, Starmer y Kock (1972)

Empezamos el capítulo 1, revisando los conceptos básicos de los Modelos Lineales y de los modelos lineales generalizados.

En el capítulo 2, estudiamos el método de mínimos cuadrados ponderados para la estimación de parámetros en modelos cuyas variables respuesta tienen distribución multinomial y de poisson.

En el capítulo 3, se aplica la teoría descrita para variables respuesta con distribución multinomial y de poisson, usando información de la Encuesta Demográfica y de Salud Familiar de 1996 (ENDES III), donde intentamos modelar las variables deseo de tener más hijos y número de mujeres esterilizadas.

CAPITULO 1

MODELOS LINEALES GENERALIZADOS

En este capítulo estudiaremos una extensión de los modelos lineales a una familia más general, propuesta por Nelder y Wedderburn (1972), denominada **Modelos Lineales Generalizados (MLG).** Esta familia unifica tanto los modelos con variables respuesta numéricas como categóricas, lo cual lleva a considerar otras distribuciones tales como la binomial, poisson, hipergeométrica, etc. además de la normal.

Dado que el modelo lineal general es un buen punto de partida para el estudio de los modelos lineales generalizados, empezamos este capítulo con una somera revisión de los principales aspectos del modelo lineal general.

1.1 MODELO LINEAL GENERAL

El modelo lineal general surge por la necesidad de expresar en forma cuantitativa relaciones entre un conjunto de variables, en la que una de ellas se denomina variable respuesta o variable dependiente y las restantes son llamadas covariables, variables explicativas, o variables independientes.

Sea Y una variable aleatoria cuya función de distribución de probabilidad pertenece a una familia de distribuciones de probabilidades ***H,*** y es explicada por un conjunto de variables $X_1,X_2,...,X_k$, las cuales son fijadas antes de conocer Y. La esperanza condicional de Y es dada por:

$$E(Y/ X_1, X_2, \ldots X_k) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_k X_k = \mu \tag{1.1}$$

Luego, si se extrae una muestra aleatoria de tamaño n $\{(y_i,x_{i1},...,x_{ik}) : i=1,2,...,n\}$, de una población en la cual la variable respuesta Y, y las variables independientes $X_1,X_2,...,X_k$ se relacionan linealmente, cada observación de la muestra puede ser expresada como:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i \qquad i=1,...,n \tag{1.2}$$

En la ecuación (1.2), el término ε_i es una perturbación aleatoria no observable denominada error aleatorio, la cual tiene esperanza cero, varianza σ^2 (constante); y dos errores cualesquiera ε_i y $\varepsilon_{i'}$, $\forall i \neq i'$ son incorrelacionados entre sí.

Utilizando notación matricial, podemos expresar (1.2) como:

$$\mathbf{Y = X\beta + \varepsilon} \tag{1.3}$$

Donde, **Y'=**(Y_1, Y_2,...,Y_n) es un vector de variables aleatorias observables, denominado vector respuesta de orden n; **X** es la matriz de variables independientes de orden nx(k+1) y $\boldsymbol{\beta}$ el vector de parámetros desconocidos de orden (k+1).

El vector de respuestas **Y** de la expresión (1.3) está formada por dos componentes, una ***sistemática*** y otra ***aleatoria***. La primera componente constituida por la combinación lineal $X\beta$, predictor lineal, el cual es representado como:

$$\boldsymbol{\eta = X\beta} \qquad (1.4)$$

La segunda componente, formada por el vector aleatorio Y, con elementos independientes entre sí, caracterizada por una distribución h $\in$ *H* con vector de esperanzas $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de covarianza $\sigma^2\mathbf{I}$.

Por otro lado, calculando la esperanza de Y en (1.3) se tiene que:

$$\mathbf{E(Y) = X\beta = \mu}$$

Una característica distintiva del modelo lineal general, es que la variable respuesta Y está medida en escala numérica, mientras que las covariables pueden ser numéricas o categóricas y además son independientes entre sí.

Covariables Numéricas

Cuando todas las covariables X_1, X_2,...,X_k son continuas, el modelo (1.2) es denominado modelo de regresión lineal múltiple. Los parámetros β_1, β_2,…,β_k, son denominados coeficientes de regresión y cada β_j representa el cambio esperado en la respuesta, Y, por cada unidad de cambio en X_j , considerando a las demás variables regresoras constantes. Siempre que el recorrido de las variables regresoras incluya el cero. El coeficiente β_0 puede ser interpretado como la media de la distribución de la variable respuesta.

Dos o más covariables pueden tener un efecto sobre la variable respuesta cuando interactúan; en este caso, y siempre que la interacción sea interpretable, estas componentes deben ser consideradas en el modelo para lograr un mejor ajuste y una interpretación óptima de los resultados.

Covariables Cualitativas o categóricas

Cuando el predictor lineal η está formado únicamente por variables cualitativas, éstas son denominadas ***factores*** y los valores que toman corresponden a los ***niveles del factor***. Estos niveles pueden no tener un orden asociado a ellos, como en el caso del color de pelaje, la raza de un animal, etc., (es el caso de las covariables de tipo nominal); también pueden tener un orden que no signifique magnitud, como una escala de preferencias (covariables ordinales); o tener asociada una escala de medición numérica, como por ejemplo las cantidades de fertilizante utilizada en un experimento agrícola.

Cuando las observaciones son clasificadas por dos o más factores, hablamos de un análisis multifactorial y los tratamientos son las combinaciones entre los niveles de los factores considerados. Por ejemplo, al considerar un modelo con 2 factores A y B, será necesario incluir términos de la forma $\alpha_i + \beta_j$, mientras que si existe interacciones se incluirán términos de la forma $(\alpha\beta)_{ij}$; siendo la representación de un modelo de 2 factores:

$$y_{ijm} = \delta+\alpha_i+\beta_j+(\alpha\beta)_{ij}+\varepsilon_{ijm} \qquad \begin{array}{l} i=1,2,...,k \\ j=1,2,...,b \\ m=1,2,...n \end{array}$$

Donde δ es la media general; α_i es el efecto del i-ésimo nivel del factor A; β_j el efecto del j-ésimo nivel del factor B; $(\alpha\beta)_{ij}$ el efecto de la interacción entre A y B; ε_{ijm} la componente aleatoria con características dadas en la ecuación (1.2); y_{ijm} es la respuesta del m-ésimo sujeto correspondiente al i-ésimo nivel del factor A y el j-ésimo nivel del factor B.

Para tres o más factores sólo necesitaremos una extensión del modelo anterior.

Para que los modelos de rango incompleto puedan ser representados de la forma (1.3), es necesario utilizar ***variables artificiales o contrastes***, con valores numéricos que representen a las categorías originales.

Para ilustrar claramente esta situación consideremos un experimento con una variable respuesta y un único factor con **k** niveles y **n** repeticiones por cada nivel, la disposición de los datos será entonces:

CUADRO Nº 1.1: Experimento con una variable respuesta y un factor con k niveles

FACTOR Niveles	OBSERVACIONES				
1	y_{11}	$\cdots$	y_{1j}	$\cdots$	y_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
i	y_{i1}	$\cdots$	y_{ij}	$\cdots$	y_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
k	y_{k1}	$\cdots$	y_{kj}	$\cdots$	y_{kn}

Donde yij es la j-ésima observación correspondiente al i-ésimo nivel del tratamiento, con i=1,2,...k y j=1,2,...n. El modelo será

$$y_{ij} = \delta + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \qquad \begin{array}{l} i=1,2,...k \\ j=1,2,...n \end{array} \qquad (1.5)$$

La representación matricial del modelo será

$$\mathbf{Y=X\beta+\varepsilon}$$

La matriz X se define de acuerdo a los objetivos del estudio, pues la interpretación de los parámetros dependerá de la manera como se defina esta matriz.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y_{11}} \\ \mathbf{Y_{12}} \\ \vdots \\ \mathbf{Y_{1n}} \\ \mathbf{Y_{21}} \\ \vdots \\ \mathbf{Y_{ij}} \\ \vdots \\ \mathbf{Y_{kn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{11} \\ \mathbf{e}_{12} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{1n} \\ \mathbf{e}_{21} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{ij} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{kn} \end{bmatrix}$$

Para garantizar que X'X sea invertible, las columnas de la matriz X deben ser linealmente independientes; para ello, si el factor A tiene k niveles, se definirá una variable artificial con k-1 niveles.

El tipo de reparametrización que utililizaremos, es llamado “reparametrización del punto central”. Así por ejemplo, si una variable A tiene k niveles, lo primero que hay que hacer es determinar la categoría que será usada como referencia. Suponiendo que elegimos la última categoría, tendríamos que la i-ésima columna de la matriz X, contiene a 1 en la i-ésima fila, -1 en la última fila y cero en las restantes. Si α_i denota el parámetro que corresponde al i-ésimo nivel del factor A, las k-1 columnas producen estimadores de los parámetros independientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{k-1}$.

Por ejemplo si tenemos una variable A con 2 categorías, la reparametrización del punto central será dada por:

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si la observación pertenece al i-ésimo nivel del factor A} \\ -1 \text{ caso contrario} \end{cases}$$

Para una variable con más de 2 niveles:

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si la observación pertenece al i-ésimo nivel del factor A} \\ 0 \text{ caso contrario} \\ -1 \text{ nivel de referencia} \end{cases}$$

Con esta reparametrización comparamos el efecto de cada una de las categorías de las variables independientes con el efecto de la categoría usada como referencia.

1.2 MODELOS LINEALES GENERALIZADOS

Como se mencionó al iniciar este capítulo, Nelder y Wedderburn estudiaron los Modelos Lineales Generalizados extendiendo la teoría de modelos lineales, incorporando de esta manera la posibilidad de modelar variables respuestas continuas o categóricas con distribuciones del error no necesariamente homocedásticos. Los modelos log lineales, logit, probit, logístico y de regresión lineal son algunos modelos que forman parte de esta familia.

Ahora, veamos cada una de las componentes de los modelos lineales generalizados:

***a) Componente Aleatoria*:** Formada por el vector aleatorio observable **Y=** $(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)'$ tal que sus elementos son independientes e idénticamente distribuidos con función de distribución perteneciente a la familia exponencial uniparamétrica,

$$h(y, \theta) = \exp\,[p(\theta)y-q(\theta)+g(y)]$$

donde p(.), q(.), y g(.) son funciones conocidas.

***b) Componente Sistemática* :** Al igual que en el modelo lineal general está dada por el predictor lineal.

$$\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{nx}1} = \mathbf{X}_{\mathbf{nxk}}\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{kx}1}$$

c) *Función de Enlace* : La función enlace ($g(\mu)$), relaciona el predictor lineal η, con el valor esperado de la variable respuesta, $E(Y/X)=\mu$**,** a través de la función:

$$g(\mu) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

Es decir:

$$\mathbf{g}(\mu) = \eta$$

Donde **g(μ)** es una función conocida, monótona y diferenciable de η, así $\mu_i = g^{-1}(\eta_i)$, i=1,…,n.

En el caso particular del modelo lineal, μ y η pueden asumir cualquier valor en la recta real, y la función de enlace es la identidad ($\eta=\mu$); en cambio, para la distribución de poisson, dado que $\mu>0$, una función de enlace adecuado es la función logarítmica ($\eta=\ln(\mu)$). Por otro lado, para la binomial, como existe la restricción de que el dominio de la función enlace está en el intervalo (0,1), una función adecuada es la llamada función logit $\eta=\ln(\mu/(1-\mu))$. (véase el apéndice A).

Como acabamos de presentar, los MLG permiten modelar variables respuestas continuas y categóricas. Al igual que en el caso continuo, los modelos con respuesta categórica consideran la posibilidad de modelar más de una variable respuesta; sin embargo en el presente estudio nos referimos sólo a modelos con una variable respuesta, claro está, que la metodología presentada puede ser extendida para dos o más variables.

1.2.1. Modelos para variables categóricas

Tabla de contingencia

Una tabla de contingencia se puede visualizar como un arreglo rectangular resultante de la clasificación cruzada de dos o más variables categóricas, donde las filas están formadas por la combinación de las categorías de las covariables, las cuales dividen a la población de objetos (unidades de análisis) en grupos o subconjuntos distintos e independientes entre sí que denominaremos subpoblaciones; en las columnas están representadas las categorías de la variable respuesta la cual es medida en cada subpoblación.

CUADRO Nº 1.2: Tabla de contingencia para una variable respuesta observada en I subpoblaciones

	Variable Respuesta					
Subpoblaciones	1	...	j	...	J	Total
1	n_{11}	⋮	n_{1j}	⋮	n_{1J}	n_{1+}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	n_{i1}	...	n_{ij}	...	n_{iJ}	n_{i+}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
I	n_{I1}	...	n_{Ij}	...	n_{IJ}	n_{I+}
Total	n_{+1}	...	n_{+j}	...	n_{+J}	n

Donde, n_{i+} es el total de observaciones en la i-ésima subpoblación; n_{+j} es el total de observaciones en la j-ésima categoría de la variable respuesta Y; y n_{ij} es el total de observaciones en la i-ésima subpoblación que pertenecen a la j-ésima categoría de la variable respuesta.

La clasificación de las unidades de la población en grupos distintos nos permite pensar en la proporción de objetos que se encuentran en cada uno de los grupos y presentar la tabla de contingencia como un arreglo en el cual las celdas contienen proporciones (probabilidades) en lugar de conteos n_{ij} (véase cuadro

1.3)

CUADRO N° 1.3: Distribución de probabilidades de una variables respuesta en I subpoblaciones

	Variable Respuesta					
Subpoblaciones	1	...	J	...	J	Total
1	π_{11}		π_{1j}		π_{1J}	π_{1+}
:	:	...	:	...	:	:
.	.		.		.	.
I	π_{i1}	...	π_{ij}		π_{iJ}	π_{i+}
:	:	...	:	...	:	:
.	.		.		.	.
I	π_{I1}	...	π_{Ij}	...	π_{IJ}	π_{I+}
Total	π_{+1}	...	π_{+j}	...	π_{+J}	1

Donde π_{ij} es la probabilidad de que un sujeto de la i-ésima subpoblación tenga la j-ésima categoría de respuesta. π_{i+} es la probabilidad marginal de la i-ésima sub población, dada por la suma de todas las categorías de la variable Y; π_{+j} es la probabilidad marginal de la j-ésima categoría de la variable Y dada por la suma sobre el total de subpoblaciones.

Existe una gama de distribuciones de probabilidad discretas tales como la multinomial, poisson, hipergeométrica, etc. las cuales pueden representar adecuadamente la distribución de probabilidad de una tabla de contingencia. La elección del modelo probabilístico que se usará depende no solo del diseño muestral utilizado sino también de los objetivos del análisis. En este trabajo nos referimos sólo a las distribuciones multinomial y de poisson.

En el tipo de tablas que acabamos de presentar nos interesa estudiar la influencia conjunta de las covariables sobre la respuesta; como éstas primeras son fijadas a priori, la importancia radica en estudiar cómo cambia la distribución de la variable respuesta en cada subpoblación (principio de homogeneidad). Con este fin formulamos modelos análogos a los modelos lineales, los que serán tratados más exhaustivamente en el capítulo IV siguiendo el enfoque de Grizzmer, Starmer y Koch, particularmente para las distribuciones multinomial y de poisson.

1.2.1.1. Modelo con variable respuesta tiene distribución Multinomial

La distribución multinomial considera el tamaño de muestra n como fijo por lo cual los totales marginales, n_{i+}, estarán condicionados a este valor puesto que no pueden excederla. En general, en este tipo de estudios, el total general n, y los totales de cada subpoblación son fijos.

El vector aleatorio $\mathbf{n_i}=(n_{i1},...,n_{ij},...,n_{iJ})$ tiene distribución multinomial con parámetros n_{i+} y $\boldsymbol{\pi_i}=(\pi_{i1},...\pi_{ij},...,\pi_{iJ})$, donde π_{ij} es la probabilidad de que un individuo seleccionado de la i-ésima subpoblación, presente la j-ésima categoría de la variable respuesta.

La función de probabilidad correspondiente bajo esta distribución es:

$$\mathbf{P(n_i)} = P(n_{i1},\cdots n_{ij},\cdots,n_{iJ}) = n_{i+}!\prod_{j=1}^{J}\frac{\pi_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!} \qquad i= 1,...,I \qquad \mathbf{(1.6)}$$

Con $\sum_{j=1}^{J} n_{ij} = n_{i+}$ i=1,. . . I ; $\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\pi_{ij} = 1$, con $\pi_{ij} \in (0,1)$.

A continuación se presenta la tabla de distribución de probabilidades para esta distribución (cuadro Nº 1.4).

CUADRO N° 1.4: Distribución de probabilidades para la distribución multinomial

	Categorías de Respuesta					
Subpoblaciones	1	...	j	...	J	Total
1	π_{11}		π_{1j}		π_{1J}	1
:	:	...	:	...	:	:
.	.		.		.	.
i	π_{i1}	...	π_{ij}		π_{iJ}	1
:	:	...	:	...	:	:
.	.		.		.	.
I	π_{I1}	...	π_{Ij}	...	π_{IJ}	1

Donde:

$$\mathbf{n_i} \sim \textbf{Multinomial } (n_{i+}, \boldsymbol{\pi}_i)$$

con $E(\mathbf{n_i}) = n_{i+}\boldsymbol{\pi_i}$ y $var(\mathbf{n_i})=n_{i+}\boldsymbol{\pi_i}(1-\boldsymbol{\pi_i})$ $\forall i=1,...,I$,

Usando notación matricial:

$$\boldsymbol{\pi}' = [\boldsymbol{\pi}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\pi}_\mathbf{i} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\pi}_\mathbf{I}] \qquad (1.7)$$

Donde,

$$\pi_\mathbf{i}' = [\pi_\mathbf{i1} \quad \cdots \quad \pi_\mathbf{ij} \quad \cdots \quad \pi_\mathbf{iJ}] \qquad (1.8)$$

Luego el vector aleatoria **n = ($\mathbf{n_1,...,n_i,...,n_I}$)** (1.6), tiene función de probabilidad dada por el producto de multinomiales

$$\mathbf{p}(\mathbf{n}_{11},\cdots\mathbf{n}_{ij},\cdots,\mathbf{n}_{I1},\cdots\mathbf{n}_{IJ}) = \prod_{i=1}^{I}\mathbf{n}_{i+}!\prod_{j=1}^{J}\frac{\boldsymbol{\pi}_{ij}^{\mathbf{n}_{ij}}}{\mathbf{n}_{ij}!} \tag{1.9}$$

Como cada subpoblación es independiente de las demás, la matriz de covarianzas de **n**, **V(n)** será una matriz diagonal de la forma:

$$\mathbf{V(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_2 & \dots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{V}_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \mathbf{V}_I \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Donde:

$$V_i = n_{i+}\begin{bmatrix} \pi_{i1}(1-\pi_{i1}) & -\pi_{i1}\pi_{i2} & \cdots & -\pi_{i1}\pi_{iJ} \\ -\pi_{i1}\pi_{i2} & \pi_{i2}(1-\pi_{i2}) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\pi_{i1}\pi_{iJ} & -\pi_{i2}\pi_{iJ} & \cdots & \pi_{iJ}(1-\pi_{iJ}) \end{bmatrix} \tag{1:11}$$

1.2.1.2. Modelo con variable respuesta tiene distribución de Poisson

Esta distribución fue derivada por Poisson (1837) a partir de la distribución binomial, él encontró qué cuando el tamaño de muestra es grande y la probabilidad de ocurrencia de un evento es pequeña, el valor esperado, $\mu=n\pi$ tiende a una constante.

La distribución de poisson está caracterizada por un solo parámetro $\mu=n\pi$, donde μ es una esperanza y puede interpretarse como el ***número esperado de ocurrencias*** en un intervalo de tiempo, área o espacio especificado; π puede definirse como el número esperado de ocurrencias del evento por unidad de tiempo, área o espacio y es llamado ***tasa de ocurrencia.***

Para diferenciarla de la distribución multinomial, en adelante denotaremos la tasa de ocurrencia como λ en lugar de π.

A diferencia de la distribución multinomial, se asume una distribución de poisson cuando el tamaño de la muestra, n, es aleatorio; lo cual lleva a considerar que para las I subpoblaciones, los conteos de cada celda (n_i , i=1,2,…,I) son variables aleatorias independientes con distribución de poisson. Luego, por la propiedad reproductiva, la función de distribución conjunta para el vector **n=(**$n_1,\ldots,n_i,\ldots,n_I$), es el producto de distribuciones de poisson con esperanza igual a:

$$E(n) = \sum_{i=1}^{I} E(n_i) = \sum_{i=1}^{I} \mu_i = \sum_{i=1}^{I} n_i \lambda_i \qquad i=1,...,I \qquad (1.12)$$

Este modelo es usado en conteos de eventos que ocurren independiente y aleatoriamente en el tiempo con una tasa de ocurrencia constante, como por ejemplo, el número de accidentes de tránsito en un periodo de tiempo determinado, la incidencia de una enfermedad, etc.

Entonces el vector aleatorio **n = (**$n_1,n_2,...,n_I$) tiene distribución producto de poisson con vector de parámetros $\boldsymbol{\mu}$ = ($\mu_1,\mu_2,...,\mu_I$) y función de probabilidad:

$$p(n) = \prod_{i=1}^{I} \frac{\mathbf{exp(}-\mu_i\mathbf{)}\mu_i^{n_i}}{n_i\mathbf{!}} \qquad (1.13)$$

Con $\mu_i \in [0 , \infty> \forall$ i= 1,2, ...,I.

El vector de esperanzas y la matriz de covarianza de **n** son dados por:

$$\mathbf{E(n)} = E\begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_i \\ \vdots \\ n_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_i \\ \vdots \\ \mu_I \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu} \qquad (1.14)$$

$$V(\mathbf{n}) = D_\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ldots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_i & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \mu_I \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

1.2.2. Estimación de Modelos Lineales Generalizados

Los dos métodos clásicos para estimar los parámetros desconocidos de un modelo lineal general, son de máxima verosimilitud (MV) y el método de mínimos cuadrados generalizados (MCG); siendo el método de mínimos cuadrados ponderados (MCP) un caso particular de este último.

A continuación, recordaremos los aspectos más importantes de ambos métodos de estimación, luego estudiaremos las condiciones bajo las cuales ambos métodos son equivalentes en distribuciones que son miembros de la familia exponencial.

En una segunda parte, estudiaremos la equivalencia entre los estimadores MV y de MCG para distribuciones que son miembros de la familia exponencial uniparamétrica. Estos resultados por lo tanto serán válidos en el contexto de los modelos lineales generalizados.

1.2.2.1. Estimación por el método de Mínimos Cuadrados Generalizados

Bajo las suposiciones establecidas para los errores al formular el modelo (1.3), los parámetros desconocidos pueden ser estimados por el método de mínimos cuadrados ordinarios. Estos parámetros se obtienen minimizando la suma de cuadrados de los errores, S($\boldsymbol{\beta}$) (la suma de cuadrados de las desviaciones de los valores observados y los valores esperados), es decir se trata de,

$$\underset{\beta\in\Re^p}{\mathbf{Min}}\ \mathbf{S}(\boldsymbol{\beta}) = \underset{\beta\in\Re^p}{\mathbf{Min}}\ (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \tag{1.16}$$

Derivando e igualando a cero **S(β)** obtenemos las ecuaciones normales:

$$\mathbf{X'Xb = X'Y} \tag{1.17}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1.17) se tiene que:

$$\mathbf{b}=(X'X)^{-1}X'Y \tag{1.18}$$

Siempre que $(X'X)^{-1}$ exista.

El teorema de Gauss Markov garantiza que (1.19) es el mejor estimador lineal insesgado del vector de parámetros de un modelo lineal general.

Por otro lado, cuando la suposición de varianza constante no se verifica, es decir $V(\varepsilon)=\sigma^2 \mathbf{V}$**;** donde V es una matriz no singular y definida positiva; el método de mínimos cuadrados ordinarios no funciona, por lo que se debe considerar una reparametrización del modelo para que se cumplan las suposiciones establecidas al formular el modelo (1.2) (véase sección A.2 del apéndice A).

Para estimar el vector de parámetros será necesario entonces,

$$\underset{\beta\in\Re^p}{\mathbf{Min}}\ \mathbf{S(\beta)} = (Y - X\beta)'\mathbf{V}^{-1}(Y - X\beta) \qquad \mathbf{(1.19)}$$

La función objetivo $\mathbf{S(\beta)}$ en (1.19) es una función continua y derivable, por lo que el mínimo se obtiene

$$\left.\frac{\partial \mathbf{S(\beta)}}{\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{j}}}\right/_{\boldsymbol{\beta}=\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{n} V(y_i)^{-1}\left[y_i - x_i b\right]x_{ij} = 0 \qquad \text{j=0,1,...,k} \qquad (1.20)$$

El sistema de ecuaciones normales es,

$$(X'\mathbf{V}^{-1}X)\mathbf{b} = X'\mathbf{V}^{-1}Y$$

Finalmente, el estimador de mínimos cuadrados generalizados de $\boldsymbol{\beta}$ será:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y} \qquad (1.21)$$

Este estimador es insesgado, con matriz de covarianza dado por

$$\mathbf{Cov(b)} = \sigma^2 (X'\mathbf{V}^{-1}X)^{-1}$$

Un caso particular del método de mínimos cuadrados generalizados se da cuando los errores son incorrelacionados y heterocedásticos, es decir la matriz V tiene la forma

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1.22)$$

El vector de parámetros estimados se representa como:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X'W X})^{-1} \mathbf{X'W Y} \qquad (1.23)$$

Donde $\mathbf{W= V^{-1}}$ **,** es dado por

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1/v_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/v_{nn} \end{bmatrix}$$

De esta manera, el estimador de mínimos cuadrados ponderados, asigna mayor peso a los elementos que tienen una varianza más pequeña.

1.2.2.2. Estimación por el método de máxima Verosimilitud

Si la función de distribución de Y pertenece a una familia de distribuciones ***H*** conocida, un método alternativo para estimar el vector de parámetros desconocidos β es el método de máxima verosimilitud.

Dado un vector de observaciones $\mathbf{y' =(y_1,\dots y_n)}$, la función de verosimilitud cuantifica la posibilidad (verosimilitud) de que un vector $\beta \in \Re^p$ haya generado el vector de respuestas observado.

La función de verosimilitud está dada por la función de densidad conjunta de las variables aleatorias independientes $Y_{1,} \dots Y_n$ reduciéndose la expresión a:

$$\mathbf{L(\beta) = h(y_1, \dots y_n) = h(y_1,\beta)h(y_2,\beta) \dots h(y_k,\beta) = \prod_{i=1}^{n} h(y_i;\beta)} \qquad \mathbf{(1.24)}$$

El estimador de máxima verosimilitud (EMV) de β es el vector **b** que maximiza $\mathbf{L(\beta)}$ en el espacio paramétrico $\Omega = \{(\beta,\sigma^2) : \beta \in \Re^p, \sigma^2 > 0\}$; esto es $L(\mathbf{b}) \geq L(\beta)\ \forall \beta \in \mathbf{\Omega}$.

Para obtener el estimador máximo verosímil necesitamos resolver el problema de maximizar $\mathbf{L}(\boldsymbol{\beta})$ para $\beta \in \Re^{\mathbf{p}}$.

Dado que la función logaritmo es monótona, aplicando logaritmo a la expresión (1.24) se tiene:

$$\mathbf{l}(\boldsymbol{\beta}) = \log L(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \log \mathbf{h}(\mathbf{y}_{\mathbf{i}};\boldsymbol{\beta}) \tag{1.25}$$

En consecuencia, si la función $\mathbf{l}(\boldsymbol{\beta})$ es continua y derivable, maximizar $\mathbf{L}(\boldsymbol{\beta})$ o $\mathbf{l}(\boldsymbol{\beta})$ son procesos equivalentes.

Para ilustrar, obtendremos el estimador de máxima verosimilitud para el caso del modelo lineal general, bajo la suposición que los errores se distribuyen normalmente con vector de medias cero y matriz de covarianza **V.** La función de verosimilitud será:

$$\mathbf{L} = (2\pi)^{-n/2}\ |\mathbf{V}|^{-1/2} \exp\{-1/2(\mathrm{Y}-\mathrm{X}\beta)'\, \mathbf{V}^{-1}(\mathrm{Y}-\mathrm{X}\beta)\}$$

Y su función soporte es:

$$\mathbf{l}(\boldsymbol{\beta}) = -\tfrac{\mathbf{n}}{2}\mathbf{log}\tfrac{2\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\mathbf{log}|\mathbf{V}| - \tfrac{1}{2}(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

$\mathrm{l}(\boldsymbol{\beta})$ es una función continua y derivable, por lo tanto, derivando e igualando a cero la expresión anterior se obtiene,

$$\mathbf{X'V^{-1}X\, b = X'V^{-1}Y.}$$

La solución de este sistema de ecuaciones nos conduce al estimador M.V de $\boldsymbol{\beta}$:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X'V^{-1}X})^{-1}\ \mathbf{X'V^{-1}Y} \tag{1.26}$$

De (1.26) y (1.19) podemos concluir que, bajo la suposición de normalidad los métodos de mínimos cuadrados y de máxima verosimilitud producen los mismos estimadores

En la siguiente sección, presentamos los teoremas que demuestran la equivalencia entre el método de mínimos cuadrados generalizados y máxima verosimilitud para aquellas funciones de distribución que pertenecen a la familia exponencial.

1.2.2.3. Equivalencia de los estimadores de Mínimos Cuadrados Ponderados y de Máxima Verosimilitud en la familia exponencial

En la sección anterior se verificó que cuando los errores se distribuyen normalmente, los estimadores de MV y MCP son equivalentes. Estudios de gran importancia para nuestro trabajo son los realizados por Nelder y Wedderburn (1972), quienes demostraron que la equivalencia entre los estimadores antes mencionados pueden ser extendidos para ciertos modelos lineales generalizados cuando la función de distribución de la variable respuesta pertenece a la familia exponencial.

Posteriormente, Bradley (1973) demuestra que el estimador de mínimos cuadrados ponderados en un modelo de regresión lineal múltiple es equivalente al estimador de máxima verosimilitud cuando la variable dependiente tiene una función de distribución perteneciente a la familia exponencial. Suponiendo que la variable respuesta Y, definida en la sección 1.1, está caracterizada por una función de densidad la cual pertenece a la familia exponencial, expresada como,

$$\mathbf{h(Y,\mu) = \exp\{p(\mu)y - q(\mu) + g(y)\}}$$

Donde **p(μ)** y **q(μ)** son funciones al menos dos veces diferenciables. La esperanza y varianza del vector **Y** estará dado por:

$$\mathbf{E(Y) = \frac{q'(\mu)}{p'(\mu)} = \mu} \qquad (1.27)$$

$$\mathbf{V(Y) = [p'(\mu)]^{-1}} \qquad (1.28)$$

Teorema 1 :

Sea $\{Y_1, Y_2, ...Y_n\}$ una muestra aleatoria de tamaño n proveniente de una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad pertenece a la familia exponencial con $E(Y_i/X_i) = X_i\beta$. Entonces el EMV de β es idéntico al de MCP y por lo tanto satisface (1.20).

Demostración:

El logaritmo de la función de verosimilitud **l(β)** es:

$\mathbf{l(\beta)} = \log \mathbf{L(\beta)} = \Sigma\{ p[x_i\beta]y_i - q[x_i\beta] + g(y)\}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta_j} \Big/ \beta_j = b_j = 0$$

tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} p'(x_i\beta)(\partial x_i\beta / \partial \beta_j) y_i - \sum_{i=1}^{n} q'(x_i\beta)(\partial x_i\beta / \partial \beta_j) = 0 \qquad j=0,1,...k \qquad (1.29)$$

Como $\partial x_i\beta / \partial \beta_j = x_{ij}$

Tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \left[p'(x_i\beta) y_i - q'(x_i\beta) \right] x_{ij} = 0 \qquad j=0,1,,...k$$

$$\sum_{i=1}^{n} p'(x_i\beta) \left[y_i - \frac{q'(x_i\beta)}{p'(x_i\beta)} \right] x_{ij} = 0 \qquad j=0,1,...k$$

De (1.27) y (1.28) tenemos:

$$\frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^{n} V(y_i)^{-1} \left[y_i - x_i\beta \right] x_{ij} \qquad j=0,1,...k \qquad (1.30)$$

Luego (1.30) es igual a (1.20). Entonces la prueba es completada.

Charles, Frome y Yu (1976) extendieron los resultados presentados por Bradley para funciones enlace no necesariamente lineales, es decir cuando

$$E(Y / X) = f(x_i, \beta)$$

Donde $f(x_i, \beta)$ es una función no necesariamente lineal.

Para más detalle ver Frome Yu (1976).

CAPITULO 2

MÉTODO DE MINIMOS CUADRADOS PONDERADOS PARA LA ESTIMACIÓN DE MODELOS LINEALES GENERALIZADOS

En este capítulo estudiaremos el método de mínimos cuadrados ponderados desarrollado por Grizzle, Starmer y Koch (1969) (método GSK), para la estimación de parámetros de un modelo lineal generalizado, y en particular para modelos cuya variable respuesta tiene distribución multinomial y de poisson.

Las principales ventajas de este método son su flexibilidad en la construcción de funciones respuesta y su facilidad de cálculo (Ror Forthofer y Robert Lehnen 1981).

2.1 FORMACIÓN DE FUNCIONES

Al modelar variables categóricas bajo el enfoque GSK, no siempre usamos directamente las frecuencias absolutas (de la variable respuesta) como variable dependiente del modelo, sino una función de éstas, a la que llamamos ***función respuesta***. El grado de complejidad de esta función va a depender de los objetivos de la investigación y de la naturaleza de los datos, pudiendo involucrar transformaciones lineales, exponenciales, logarítmicas o combinaciones de ellas.

Para el caso de variables respuesta con distribución de probabilidad multinomial y de poisson, la función respuesta que se forma se basa en las probabilidades de la variable respuesta o en las tasas de ocurrencia, respectivamente.

En general, las funciones respuesta construidas constituyen una representación matemática de la variable respuesta cuya variabilidad buscamos explicar. Esta función debe:

1.- Conseguir linealizar la relación entre el predictor lineal y la esperanza de la variable respuesta.

2.- Facilitar la estimación de los parámetros; pues cuando el vector de parámetros del modelo pertenece a un espacio restringido, las funciones facilitan la estimación al ampliar un espacio paramétrico restringido hacia los reales. ($-\infty$, $+\infty$). Este es el caso por ejemplo, de las distribuciones multinomial y de poisson cuyos parámetros sólo toman valores entre 0 y 1 en el primer caso y valores positivos en el segundo.

3.- Debe ser interpretable; Por ello es recomendable que las funciones sean definidas tomando como base los objetivos y las hipótesis que se desean probar.

2.1.1 Definición de la función respuesta

El modelo lineal generalizado planteado en el capítulo 1, relaciona el valor esperado de la variable respuesta con el predictor lineal a través de la función enlace g(.). Para variables respuesta con distribución multinomial o de poisson, tenemos por lo general, modelos de la forma: $\mu=X\beta$ o $\mu=\exp(X\beta)$. donde las funciones enlace son g=I y g=log(.), respectivamente.

Para utilizar el método de MCP, el vector de respuestas observadas $\mathbf{n}=(n_{11},\ldots,n_{ij},\ldots n_{IJ})$ se representa como un vector de funciones $\mathbf{F(n)=(F_1(n),\ldots,F_t(n))'}$ de rango tx1. Para ello, se deben tener en cuenta dos condiciones: que $J\geq 2$ y que $t\leq(J-1)\mathbf{I}$. Esta segunda condición, asegura que el número de componentes linealmente independientes de **F(n)** no exceda al número de componentes linealmente independientes del vector de parámetros.

Luego, una función respuesta es una función definida como:

$$\mathbf{F}: \Re^{IJ} \to \Re^{t}$$

$$\mathbf{n} \to \mathbf{F(n)}$$

Donde:

$$\mathbf{F(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(\mathbf{n}) \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{n}) \\ \vdots \\ \mathbf{F_t}(\mathbf{n}) \end{bmatrix}_{\mathbf{t}x1} \qquad \mathbf{(2.1)}$$

2.1.2. Formación de funciones para variables respuesta multinomial

Siguiendo el enfoque planteado por Grizzle, Starmer y Koch, y utilizando los resultados de la sección 1.2.1, definimos la función respuesta dada en (2.1) a partir de las probabilidades de cada celda de la tabla de contingencia, para ello definimos: $\mathbf{F_m(\pi)}$ como una función no necesariamente lineal de los elementos de $\boldsymbol{\pi}$, que tienen derivadas continuas hasta de segundo orden con respecto a π_{ij}, con $m=1,\ldots,t\leq(J-1)\mathbf{I}$.

Entonces el vector de respuesta dado en (2.1) es:

$$\mathbf{[F(\pi)]' = [\ F_1(\pi),\ F_2(\pi),\ldots,F_t(\pi)\ ]} \qquad \mathbf{(2.2)}$$

Un estimador consistente y no viciado del vector de parámetros π es **p=** **(**$p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{ij}, \ldots, p_{IJ}$).

Donde:

$p_{ij} = n_{ij} / n_{i+}$.

n_{ij} = frecuencias observadas en la i-ésima subpoblación que pertenecen a la j-ésima categoría de la variable respuesta.

n_{i+} = Total de observaciones de la i-ésima subpoblación.

Con $E(p_{ij}) = \pi_{ij}$; Var(p_{ij}) = $\frac{1}{n_{i+}} \pi_{ij}(1-\pi_{ij})$;

cov(p_{ij}) = $\frac{1}{n_{i+}}(-\pi_{ij}\pi_{ik})$

Luego, de (2.2),

$$[\mathbf{F}]' = [\ \mathbf{F_1(p), F_2(p), \ldots, F_t(p)}\ ] \qquad \textbf{(2.3)}$$

$$\mathbf{p'} = [\mathbf{p}_1' \quad \mathbf{p}_2' \quad \cdots \quad \mathbf{p}_I' \;]_{1x(IJ)} \;\; \mathbf{y} \;\; \mathbf{p}_i' = [\mathrm{p}_{i1} \quad \mathrm{p}_{i2} \quad \cdots \quad \mathrm{p}_{iJ}\;]_{1xJ}$$

Con matriz de covarianza estimada para la i-ésima subpoblación

$$\mathbf{Cov\ (p_i) = \ V_i} = \frac{1}{\mathbf{n_{i+}}} \begin{bmatrix} \pi_{i1}(1-\pi_{i1}) & -\pi_{i1}\pi_{i2} & \cdots & -\pi_{i1}\pi_{iJ} \\ -\pi_{i1}\pi_{i2} & \pi_{i2}(1-\pi_{i2}) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\pi_{i1}\pi_{iJ} & -\pi_{i2}\pi_{iJ} & \cdots & -\pi_{ij}\pi_{iJ} \end{bmatrix}_{\mathbf{jxj}} \qquad \textbf{(2.4)}$$

Luego, **V(p)** es una matriz bloque diagonal de rango (IJ)x(IJ) con elementos cero fuera de la diagonal principal:

$$\mathbf{V(p)=} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{V}_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \mathbf{V}_I \end{bmatrix}_{\mathbf{IJXIJ}} \qquad \textbf{(2.5)}$$

Entonces, la matriz de covarianza estimada de la función (2.3) es

$$\mathbf{V_F = HV(p)H'} \qquad \textbf{(2.6)}$$

Donde, $\mathbf{H(\pi)}$ es una matriz de orden tx(IJ), de la forma:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \pi_{11}} & \frac{\partial F_1}{\partial \pi_{12}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \pi_{1J}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial \pi_{i1}} & \frac{\partial F_m}{\partial \pi_{i2}} & \cdots & \frac{\partial F_{m1}}{\partial \pi_{1J}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_t}{\partial \pi_{I1}} & \frac{\partial F_t}{\partial \pi_{I2}} & \cdots & \frac{\partial F_t}{\partial \pi_{IJ}} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.7)}$$

La matriz $\mathbf{V_F}$ de la expresión (2.6) es el estimador muestral de la matriz de covarianza de **F.** Cuando $F_m(p)$ es una función lineal de los elementos de p, $\mathbf{V_F}$ es exactamente la matriz de covarianzas de **F**; y cuando $F_m(p)$ es una función no lineal de los elementos de **p,** $\mathbf{V_F}$ es la matriz de covarianza asintótica de **F** la cual se obtiene por métodos numéricos.

Como las t funciones han sido definidas de tal manera que son independientes entre sí y $\sum\pi_{ij}$=1, i=1,…,I, se garantiza que tanto H como HV(p)H' sean de rango t.

Como H depende directamente de la función **F(p)**, $\mathbf{V_F}$ será diferente para cada familia de funciones, siendo las más discutidas en la aplicación del método las funciones lineal y logarítmica.

a) Funciones Lineales: $(\mu = X\beta)$

Para la familia de funciones lineales, la transformación lineal de las probabilidades; que genera la función respuesta es dada por:

$$\mathbf{F = A\,\pi} \qquad \textbf{(2.8)}$$

Donde, la matriz A, de rango tx(IJ) contiene los coeficientes de π en la transformación lineal, es decir, los elementos de la i-ésima fila de la matriz A son los coeficientes asociados a las probabilidades π_{ij} en F_m; m=1,…,t. Calculando **H** a partir de (2.7) se tiene,

$$H = \frac{\partial \mathbf{F}(\boldsymbol{\pi})}{\partial(\boldsymbol{\pi})} = A$$

y de (2.6) se tiene que,

$$\mathbf{V_F = AV(p)A'} \qquad \textbf{(2.9)}$$

El siguiente ejemplo ilustra la formación de la función respuesta para el caso de dos subpoblaciones y una variable respuesta con 3 categorías cuyas probabilidades se muestran en el cuadro Nº 2.1.

CUADRO Nº 2.1: Distribución de probabilidades de una variable respuesta con distribución multinomial

	Var. respuesta			
Subpoblaciones	**1**	**2**	**3**	**Total**
1	π_{11}	π_{12}	π_{13}	1
2	π_{21}	π_{22}	π_{23}	1

Supongamos que las funciones de interés para cada subpoblación están dadas por las combinaciones lineales:

$$F_1(\pi) = \pi_{11} + 2\pi_{12} + 3\,\pi_{13}$$
$$F_2(\pi) = \pi_{21} + 2\pi_{22} + 3\,\pi_{23}$$

Expresando lo anterior en forma matricial tenemos,

$$\mathbf{F = A\pi}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \pi_{11} \\ \pi_{12} \\ \pi_{13} \\ \pi_{21} \\ \pi_{22} \\ \pi_{23} \end{bmatrix}$$

De (2.7), la matriz H es dada por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \pi_{11}} & \frac{\partial F_1}{\partial \pi_{12}} & \frac{\partial F_1}{\partial \pi_{13}} & \frac{\partial F_1}{\partial \pi_{21}} & \frac{\partial F_1}{\partial \pi_{22}} & \frac{\partial F_1}{\partial \pi_{23}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \pi_{11}} & \frac{\partial F_2}{\partial \pi_{12}} & \frac{\partial F_2}{\partial \pi_{13}} & \frac{\partial F_2}{\partial \pi_{21}} & \frac{\partial F_2}{\partial \pi_{22}} & \frac{\partial F_2}{\partial \pi_{23}} \end{bmatrix}$$

Operando se obtiene

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

Luego, de (2.5) y de (2.6), la matriz de covarianza estimada de la función es dada por,

$$\mathbf{V_F = A\ V(p)A'} \qquad \textbf{(2.10)}$$

b) Funciones logarítmicas: $\mu = \exp(X\beta)$

Cuando la relación entre la variable respuesta y el predictor lineal no es lineal, es necesario usar una función enlace diferente a la identidad, para linealizar la relación entre ellas.

Ahora supongamos que las funciones están dadas por:

$$\mathbf{F_{tx1}(\pi) = K_{tx1}\log(A_{IxIJ}\pi_{IJx1})} \qquad \textbf{(2.11)}$$

Donde **K** es una matriz de constantes arbitrarias de rango $t \leq \mu \leq ij$

Una vez definida la función respuesta **F(π)** que linealiza la relación entre la esperanza de la variable respuesta y el predictor lineal. la representación del modelo será:

$$\mathbf{F(\pi)_{tx1} = X_{txk}\beta_{kx1}} \qquad \textbf{(2.13)}$$

Donde: **X** es la matriz del modelo de orden (txk) y de rango $k \leq t$; **β** es el vector de parámetros desconocidos de rango kx1.

2.1.3. Formación de funciones para variables respuesta Poisson

Grizzmer, Starmer y Koch (1969) desarrollaron el enfoque que presentamos, para variables respuesta con distribución multinomial el cual puede ser extendido para el caso de variables respuesta con distribución poisson. En este caso, la función respuesta se construye a partir de las tasas de ocurrencia, tal como veremos más adelante.

Para ilustrar el análisis cuando la variable respuesta tiene distribución poisson, presentamos un ejemplo propuesto por Cutler e Young (1975). Los datos (Cuadro Nº 2.2) corresponden a nuevos casos de melanoma (un tipo de cáncer a la piel) en hombres blancos entre 1969-1971 de dos regiones de los Estados Unidos.

CUADRO Nº 2.2: Casos Nuevos de Melanoma entre 1969-1971 en hombres blancos. EE.UU 1969-1971

Grupos de edad	Región		Total
	Norte	Sur	
Menor de 35	61	64	125
35-44	76	75	151
45-54	98	68	166
55-64	104	63	167
65-74	63	45	108
Mayor de 75	80	27	107
Total	482	342	824

El objetivo del estudio era verificar la homogeneidad de las tasas de incidencia de esta enfermedad entre los diversos grupos etáreos en las dos regiones. Puesto que la identificación de un caso de melanoma puede ser visto como un evento relativamente raro, es razonable caracterizarlo usando la distribución poisson.

Tal como vimos en la sección 2.2.1.2, las frecuencias de cada celda (n_{ij}) son variables aleatorias con distribución poisson. Entonces, de (2.12),

$$E(n_i)= \mu_i = N_i\lambda_i \qquad i=1,2,\ldots,I \qquad (2.14)$$

Donde:

n_i = Número de casos nuevos de melanoma para la i-ésima subpoblación.

μ_i = Número esperado de nuevos casos de melanoma en la i-ésima subpoblación.

N_i = Población total (expuesta) de la i-ésima subpoblación

$\lambda_i = \dfrac{\mu_i}{N_i}$ = Tasa de incidencia de melanoma en la i-ésima subpoblación;

Usando notación matricial, el modelo puede ser representado como:

$$\mathbf{D}_{\mu} = \mathbf{D}_{\mathbf{N}} \exp(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \qquad (2.15)$$

O equivalentemente:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{D}_{\mu} = \exp(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

Donde: $\mathbf{D}_{\lambda}$ es el vector de tasas de incidencia observado, $\mathbf{D}_{\mu}$ es el vector de esperanzas de nuevos casos de melanoma; $\mathbf{D}_{\mathbf{N}}$ es la matriz de la población expuesta, β el vector de parámetros y X la matriz de diseño.
Aplicando logaritmo para linealizar la relación, la función respuesta estará dada por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{D}_{\mu}) = \mathbf{log}(\mathbf{D}_{\lambda}) = \log\left(\frac{\mathbf{D}_{\mu}}{\mathbf{D}_{\mathbf{N}}}\right)$$

Donde

$$\mathbf{D}_{\lambda} = \mathbf{D}_{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{D}_{\mu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N_1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{N_i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{N_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{\mathbf{i}} \\ \vdots \\ \mu_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu_1}{N_1} \\ \vdots \\ \frac{\mu_{i1}}{N_{i1}} \\ \vdots \\ \frac{\mu_{12}}{N_{12}} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(2.16)}$$

Para calcular las tasas de incidencia (la función respuesta), es necesario contar con la población expuesta. En el cuadro Nº 2.3, se presenta la información necesaria para construir la función respuesta observada $\mathbf{D}_{\lambda}$.

CUADRO Nº 2.3: Casos Nuevos de Melanoma entre 1969-1971

SUBPOB	Grupo Etáreo	región	Casos de Melanoma (n_i)	Población Expuesta (N_i)	Tasa de incidencia Est (por 1,000 000) $\hat{\lambda}_i = n_i / N_i$
1	Menor 35	Norte	61	2,880 262	21.2
2		Sur	64	1,074 246	59.6
3	35-44	Norte	76	564 535	134.6
4		Sur	75	220 407	340.3
5	45-54	Norte	98	592 983	165.3
6		Sur	68	198 119	343.2
7	55-64	Norte	104	450 740	230.7
8		Sur	63	134 084	469.9
9	65-74	Norte	63	270 908	232.6
10		Sur	45	70 708	636.4
11	75 a más	Norte	80	161 850	494.3
12		Sur	27	34 233	788.7

Expresando la ultima columna de el cuadro Nº 2.3 como un vector se tiene

$$\mathbf{D}_\lambda = \begin{bmatrix} 61/2880262 \\ 64/1074246 \\ 76/564535 \\ 75/220407 \\ 98/592983 \\ 68/198119 \\ 104/450740 \\ 63/134084 \\ 63/270908 \\ 45/70708 \\ 80/161850 \\ 27/34233 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.2 \\ 59.6 \\ 134.6 \\ 340.3 \\ 165.3 \\ 343.2 \\ 230.7 \\ 469.9 \\ 232.6 \\ 636.4 \\ 494.3 \\ 788.7 \end{bmatrix}$$

Luego el modelo linealizado será

$$\mathrm{F}(\mathbf{D}_\mu) = \log \mathbf{D}_\lambda = X\beta$$

$$\log \mathbf{D}_{\lambda} = \log \begin{bmatrix} 21.2 \\ 59.6 \\ 134.6 \\ 340.3 \\ 165.3 \\ 343.2 \\ 230.7 \\ 469.9 \\ 232.3 \\ 636.4 \\ 494.3 \\ 788.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix}$$

β_i, i=1,...,5 corresponde al efecto de pertenecer al i-ésimo grupo etáreo comparado con el grupo de referencia, (menor de 35 años).
β_6 , mide el efecto del pertenecer a la región sur comparado con la región norte.

Generalizando este resultado para cualquier variable con distribución poisson, bajo la estructura loglineal el modelo es representado por:

$$\mathbf{D}_{\mu} = \mathbf{D}_{\mathbf{N}} \exp(\mathbf{X}\beta) \qquad \textbf{(2.17)}$$

Luego, para que (2.17) sea tratado bajo el enfoque de los modelos lineales es necesario aplicar una transformación logarítmica, de modo que:

$$\mathbf{F}(\mu) = \log(\mathbf{D}_{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{D}_{\mu}) = \mathbf{X}\beta \qquad \textbf{(2.18)}$$

La función (2.18), puede ser estimada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{n}) = \log(\mathbf{D}_{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{D}_{\mathbf{n}}) = \log(\mathbf{D}_{\hat{\lambda}}) \qquad \textbf{(2.19)}$$

Con,

$$\mathbf{E}[\mathbf{F}(\mathbf{n})] = \mathbf{E}\left[\log(\mathbf{D}_{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{D}_{\mathbf{n}})\right] \cong \log \mathbf{D}_{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{D}_{\mu} = \log \lambda$$

De (1.15) y (2.6), se tiene que

$$\mathbf{V(F(n))=V_F = HV(D_n)H'}$$

Donde $\mathbf{H} = \frac{\partial \log(\mathbf{D_N^{-1} D_\mu})}{\partial \mathbf{D_\mu}} = \mathbf{D_N^{-1}(D_N^{-1}D_\mu)^{-1}}$

De (2.14) se tiene que,

$$\mathbf{D_\mu = D_N D_\lambda}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{D_N^{-1}(D_N^{-1}D_N D_\lambda)^{-1}}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{D_N^{-1}D_\lambda^{-1}} = \mathbf{D_\lambda^{-1}D_N^{-1}}$$

Finalmente, la matriz de covarianzas estimadas es dada por:

$$\mathbf{V_F = HV(D_n)H'}$$

$$\mathbf{V_F} = \mathbf{D_N^{-1}D_\lambda^{-1}V(D_n)(D_N^{-1}D_\lambda^{-1})'}$$

$$= \mathbf{D_\lambda^{-1}D_N^{-1}V(D_n)(D_\lambda^{-1})'(D_N^{-1})'}$$

Como $\mathbf{D_N}$ y $\mathbf{D_\lambda}$ son matrices diagonales, con elementos cero fuera de la diagonal principal

$$\mathbf{V_F} = \mathbf{D_N^{-1}D_\lambda^{-1}V(D_n)D_\lambda^{-1}D_N^{-1}}$$

Como $\mathbf{V(D_n) = D_\mu = D_N D_\lambda}$

$$\mathbf{V_F} = \mathbf{D_N^{-1}D_\lambda^{-1}D_N D_\lambda D_\lambda^{-1}D_N^{-1}}$$

La varianza estimada de $\mathbf{F(\mu)}$ queda expresada como:

$$\mathbf{V_F} = \mathbf{D_N^{-1} D_\lambda^{-1}} \qquad \textbf{(2.20)}$$

2.2.- ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DEL MODELO:

A continuación presentamos la estimación del vector de parámetros **β,** de su matriz de covarianza y de la función respuesta para el modelo

$$\mathbf{F = X\beta}$$

2.2.1- Estimación del vector de parámetros β:

Tal como ya mencionamos en el capítulo anterior, el criterio de la estimación de MCP se basa en la elección del vector **β** que minimice la suma de cuadrados de los residuos **S(β)** ponderada por la inversa de la matriz de covarianza. Esto es,

$$\mathbf{S(\beta)} = (\mathbf{F\text{-}X\beta})'\mathbf{V_F}^{-1}((\mathbf{F\text{-}X\beta}) \qquad \textbf{(2.21)}$$

Donde, F es el vector de la función respuesta observada; X es la matriz del modelo, **β** es el vector de parámetros a estimar y $\mathbf{V_F}$ es la matriz de covarianza de la función **F**

Suponiendo que **S(β)** es continua y derivable, se obtiene el estimador a partir de

$$\left.\frac{\partial \mathbf{S(\beta)}}{\partial \beta}\right/_{\beta = \mathbf{b}} = (\mathbf{X' V_F^{-1} X})\mathbf{b} - \mathbf{X' V_F^{-1} F} = \mathbf{0} \qquad \textbf{(2.22)}$$

$$(\mathbf{X' V_F^{-1} X})\mathbf{b} = \mathbf{X' V_F^{-1}\ F} \qquad \textbf{(2.23)}$$

Como **X** es una matriz (nxk) de rango k y $\mathbf{V_F}$ es una matriz (txt) no singular, $\mathbf{X'V_F^{-1}X}$ es también no singular, por lo tanto aseguramos la existencia de $\mathbf{(X'V_F^{-1}X)^{-1}}$, obteniendo:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}_\mathbf{F}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}_\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F} \qquad \textbf{(2.24)}$$

Los pesos están dados por los elementos de la matriz de covarianza estimada de $\mathbf{V_F}$ dando mayor peso a aquellos elementos de F que tienen varianzas mas pequeñas y en los cuales tenemos mayor confianza.

Propiedades del estimador b:

a) b es un estimador insesgado.

$$\mathbf{E(b) = E[(X'V_F^{-1}X)^{-1}X'V_F^{-1}F]}$$

$$\mathbf{= (X'V_F^{-1}X)^{-1}X'V_F^{-1}\,E(F)]}$$

Como $\mathbf{E(\hat{F})}$ **= X$\boldsymbol{\beta}$,** entonces:

$$\mathbf{E(b) = (X'V_F^{-1}X)^{-1}X'V_F^{-1}X\boldsymbol{\beta}}$$

$$\mathbf{E(b) = \boldsymbol{\beta}.}$$

b) La matriz de covarianza es dada por:

$$\mathbf{COV(b) = COV[(X'V_F^{-1}X)^{-1}\,X'V_F^{-1}F\,]}$$

Usando la propiedad **COV(AY) = AV(Y)A',** donde **A** es una matriz de constantes. Tenemos:

$$\mathbf{COV(b) =[(X'V_F^{-1}X)^{-1}\,X'V_F^{-1}\,]COV(F)\,[(X'V_F^{-1}X)^{-1}\,X'V_F^{-1}]'}$$

Reemplazando **COV(F)** por su estimador $\mathbf{V_F}$ obtenemos:

$$\mathbf{COV(b) = [(X'V_F^{-1}X)^{-1}\,X'V_F^{-1}]\,V_F\,[V_F^{-1}]'\,X\,[(X'V_F^{-1}X)^{-1}]'}$$

$$\mathbf{= (X'V_F^{-1}X)^{-1}\,X'[V_F^{-1}]'\,X\,[(X'V_F^{-1}X)^{-1}]'}$$

$$\mathbf{= [(X'V_F^{-1}X)^{-1}\,(X'V_F^{-1}X)'\,[(X'V_F^{-1}X)^{-1}]'}$$

Así obtenemos que la matriz de covarianza de **b** es:

$$\mathbf{V_b = COV(b) = (X'V_F^{-1}X)^{-1}} \qquad \mathbf{(2.25)}$$

2.2.2.- Estimación de la Función Respuesta:

La función respuesta estimada está dada por:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{Xb}$$

Donde $\hat{\mathbf{F}}$ es la función respuesta estimada; **X** es la matriz del modelo y **b** es el vector parámetros estimados.

Reemplazando **b** por su estimador (2.24), la función respuesta estimada $\hat{\mathbf{F}}$ es:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{X(X'V_F^{-1}X)^{-1}X'V_F^{-1}F}$$

Este estimador de la función respuesta es un estimador insesgado pues E($\hat{\mathbf{F}}$)=Xβ, y matriz de covarianzas (2.25) dada por:

$$\mathbf{V(\hat{F}) = ACOV(b)A'}$$

Usando el resultado (2.25):

$$\mathbf{V(\hat{F}) = A(X'V_F^{-1}X)^{-1}\ A'} \qquad \mathbf{(2.26)}$$

2.2.2.1. Función respuesta estimada para una variable con distribución multinomial

i) Esperanza y matriz de covarianza estimada:

Bajo esta distribución. La esperanza del vector de probabilidades estimadas es:

$$\mathbf{E(p)} = E\begin{bmatrix} \frac{n_{11}}{n_{1+}} \\ \frac{n_{12}}{n_{1+}} \\ \vdots \\ \frac{n_{IJ}}{n_{I+}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{11} \\ \pi_{12} \\ \vdots \\ \pi_{IJ} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

La matriz de covarianza estimada del vector de probabilidades estimadas para la i-ésima subpoblación:

$$\hat{V}_{i} = \frac{1}{n_{i+}}\begin{bmatrix} p_{i1}(1-p_{i1}) & -p_{i1}p_{i2} & \cdots & -p_{i1}p_{iJ} \\ -p_{i1}p_{i2} & p_{i2}(1-p_{i2}) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_{i1}p_{iJ} & -p_{i2}p_{iJ} & \cdots & p_{iJ}(1-p_{iJ}) \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Luego, a partir de (2.28), la matriz de covarianza estimada para las I subpoblaciones será:

$$\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{V}}_2 & \dots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{i}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{I}} \end{bmatrix}_{\mathbf{IJxIJ}} \tag{2.29}$$

$\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{p}}$, es una matriz bloque-diagonal formada por matrices JxJ en la diagonal principal y valores ceros fuera de ella. Esta estructura bloque-diagonal es el resultado de considerar las I subpoblaciones independientes entre si.

A partir de $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{p}}$, se construye el estimador de la matriz de covarianza de la función observada **F** (2.7).y (2.9),

$$\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{F}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{p}}\mathbf{A'} \tag{2.30}$$

2.2.2.2. Función respuesta estimada para una variable poisson

Un estimador de $\mathbf{F} = \mathbf{log(D_{\lambda})}$ es:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{log(D_{\hat{\lambda}})} \qquad \textbf{(2.31)}$$

la matriz de covarianza estimada, a partir de (2.19) es dada por:

$$\mathbf{V_{\hat{F}}} = \mathbf{D_N^{-1} D_{\hat{\lambda}}^{-1}}$$

$$\mathbf{V_{\hat{F}}} = \mathbf{D_N^{-1} D_N D_n^{-1}}$$

Luego,

$$\mathbf{V_{\hat{F}}} \cong \mathbf{D_n^{-1}} \qquad (2.32)$$

Matricialmente,

$$\mathbf{V_{\hat{F}}} = \begin{bmatrix} 1/\mathbf{n}_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1/\mathbf{n_i} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1/\mathbf{n_I} \end{bmatrix}$$

Cuando los tamaños de muestra son suficientemente grandes, las distribuciones de probabilidad de las funciones multinomial y poisson convergen asintóticamente a una distribución normal, asi, F(**p**) ≈ N[**A**$\boldsymbol{\pi}$**, AV(p)A′],** para el caso de la multinomial y $\mathbf{F(\lambda)} \cong \mathbf{N_I(\mu, D_{\mu})}$ para la poisson.

2.3:EVALUACIÓN DEL MODELO

2.3.1. Bondad de ajuste

Luego de estimar los parámetros, debemos asegurarnos que el modelo ajustado represente adecuadamente a los datos.

Ajustar un modelo a los datos puede considerarse como una manera de reemplazar el conjunto de valores observados por un conjunto de valores ajustados provenientes del modelo utilizado, el cual involucra un número pequeño de parámetros. Como los valores ajustados, no son iguales a los observados, debemos buscar aquel modelo cuya discrepancia con los datos sea mínima.

El modelo más simple que podemos definir, es el ***"modelo nulo",*** el cual contiene un único parámetro representando una media común, μ, para todos los valores observados; por lo tanto, consigna toda la variabilidad en la componente aleatoria. En el otro extremo se tiene el ***"modelo completo",*** el cual tiene tantos parámetros como observaciones, consignando toda la variación en la componente sistemática.

En la práctica, ambos modelos no son informativos, sin embargo, el modelo completo es un buen punto de partida como medida de bondad de ajuste para un modelo intermedio con k parámetros, siempre buscando modelos parsimoniosos.

La verificación de la adecuación del modelo lo hacemos generalmente a partir del análisis de los residuos y de las pruebas de bondad de ajuste o de discrepancia. Existen diferentes medidas de discrepancia (o bondad de ajuste), una de ellas se basa en el logaritmo de la razón de verosimilitud, también llamada función "desvianza". Otra medida importante de bondad de ajuste, y bastante usada al aplicar MCP, es la estadística de Wald. Cuando los datos tienen distribución Poisson o Multinomial, esta estadística es equivalente a la desvianza.

Una de las expresiones de esta estadística para el modelo $F = X\beta$ es:

$$Q_w = (F-X\beta)'V_F^{-1}(F-X\beta) \qquad \textbf{(2.33)}$$

Para muestras grandes la estadística $\mathbf{Q_w}$ tiene aproximadamente una distribución χ^2, con grados de libertad igual a la diferencia entre el número de filas de **F** menos el número de parámetros en el modelo.

En el presente estudio, no haremos un análisis exhaustivo de las técnicas de análisis de los residuos, por ser un tema que escapa de nuestros objetivos pero que debido a su extensión e importancia podría ser motiva de estudios posteriores.

2.3.2. Contrastes de Hipótesis con respecto a los coeficientes de regresión

Suponiendo que el modelo propuesto ajusta adecuadamente a los datos, es posible determinar los factores que están relacionados con la variable respuesta contrastando hipótesis lineales sobre los parámetros del modelo.

Un estudio individual de la significancia de cada parámetro puede ser hecha utilizando la estadística de Wald, así

$$H_o : \beta_j = 0 \quad j=1,...,k$$

La estadística de prueba es:

$$W_j^2 = \frac{b_j}{V(b_j)}$$

Donde $V(b_j)$ es la varianza del parámetro estimado b_j.

En general, podemos probar hipótesis lineales sobre los estimadores de β, bajo la hipótesis nula:

$$H_o : \mathbf{C\beta = 0}$$

Donde: **C** es una matriz de contrastes ortogonales utilizada para formar las combinaciones lineales; y **β** es el vector de parámetros.

La estadística de prueba para la hipótesis es:

$$\mathbf{X^2} = \mathbf{(Cb)'[C(X'V_F X)^{-1}]^{-1}Cb} \qquad \mathbf{(2.33)}$$

Para muestras grandes, esta estadística tiene aproximadamente una distribución χ^2 bajo la hipótesis nula, H_0:$\mathbf{C\beta}$=$\mathbf{0}$. Los grados de libertad asociados con esta prueba son iguales al número de filas de la matriz C.

2.4. ASPECTOS RELACIONADOS CON EL TAMAÑO DE MUESTRA

Para aplicar el procedimiento de estimación por MCP, debido a la naturaleza asintótica de sus pruebas estadísticas, necesitamos un tamaño de muestra mínimo para obtener resultados confiables.

Cuando las probabilidades de interés están entre 0.2 y 0.8, Algunos autores (ver Forthofer y Lehnen) sugieren un tamaño mínimo de 10 observaciones por subpoblación y que no más del 25% del total de funciones contengan muestras menores a 25 ya que la estimación de los parámetros se basa en aproximaciones asintóticas.

Por otro lado, cuando las probabilidades son menores de 0.2 o mayores de 0.8 (probabilidades extremas), el tamaño de cada subpoblación debe ser tal que $n_{i+} \pi_i \geq 5$ y $n_{i+} (1 - \pi_i) \geq 5$.

Otros autores aconsejan en general fijar un mínimo de 20 observaciones por subpoblación.

En el caso de tener subpoblaciones con tamaños menores a los requeridos, una solución alternativa es juntar subpoblaciones siempre y cuando tenga sentido el hacerlo, o de lo contrario retirarlas del estudio.

Otro punto importante que causa problemas en el análisis es la presencia de celdas vacías. Hay dos situaciones en las cuales las celdas vacías causan problemas de estimación, la primera ocurre cuando la función formada es una proporción entre cero y uno, en tal caso la varianza de la función observada se hace cero y por lo tanto la estadística chi cuadrado no estaría definida; La segunda situación se presenta cuando es necesario utilizar transformaciones logarítmicas, como el logaritmo de cero no está definido, es imposible calcular la función y su varianza observada.

Una solución a este problema (Goodman 1970) es adicionar 0.5 en las celdas vacías, esta solución introduce un sesgo en la estimación. El tamaño del sesgo dependerá del total de casos con celdas vacías que se presenten, de la naturaleza de la función analizada y del tipo de análisis.

CAPITULO 3

APLICACION DEL METODO DE MINIMOS CUADRADOS PONDERADOS PARA MODELAR VARIABLES RESPUESTA CON DISTRIBUCIONES MULTINOMIAL Y DE POISSON

En los últimos años, el gobierno peruano amplió las actividades y programas de planificación familiar con el objeto de incrementar la prevalencia de uso de anticonceptivos seguros y eficaces; ampliar la cobertura de los servicios de salud reproductiva a todas las regiones del país y propiciar la compatibilidad de la disminución de la fecundidad con la protección de la salud de la madre y el niño.

Para el cumplimiento de estos objetivos es necesario contar con la información necesaria para la formulación adecuada de planes y programas. Una fuente importante de información fue la Encuesta Demográfica y de Salud Familiar de 1996 (ENDES III). Esta encuesta recoge información sobre características generales de la población de mujeres en edad fértil (15-49 años) tales como distribución por sexo, edad, regiones naturales y departamentos; niveles educativos y asistencia escolar entre otros aspectos.

El recojo de la información se realizó en todo el país a un total de 28951 mujeres en edad fértil. Además se tomó una submuestra de 2274 mujeres y de sus hijos menores de 5 años para el estudio de la anemia y de 2487 hombres de 15 a 59 años para determinar la prevalencia de uso de anticonceptivos y el conocimiento que tienen sobre el SIDA y otras enfermedades de transmisión sexual.

Una variable demográfica importante para evaluar la tendencia de crecimiento de la población es la fecundidad, la cual si bien ha venido descendiendo, su nivel es aún elevado. En el periodo 1993-1996 la tasa de fecundidad fue 3.5 hijos por mujer; que comparada con la tasa de fecundidad deseada (2.2 hijos por mujer) significa 1.3 hijos más de los deseados, es decir un 59% más alta que la tasa de fecundidad deseada.

El nivel de fecundidad en el país presenta marcadas diferencias según el nivel educativo de la mujer, el nivel de urbanización de la zona de residencia y la edad entre otras variables importantes. Una variable importante que intenta medir las preferencias de fecundidad entre las mujeres peruanas en edad fértil es el ***deseo de más hijos***. Es importante notar que en esta encuesta casi el 60% de mujeres en unión conyugal indicaron su deseo de no tener más hijos. El deseo de no tener más hijos se incrementa de acuerdo al número de hijos vivos; a la edad (desde un 43% entre las mujeres de 15-19 años hasta más de las dos terceras partes a partir de los 30 años). En la zona rural el deseo de no tener más hijos (75%) es mayor que en la zona urbana (66%) siendo a su vez mayor entre las mujeres de la sierra que de la costa.

Se puede observar que el número de hijos, la edad, zona de residencia, nivel educativo, se relacionan con el deseo de tener más hijos; en este capítulo del trabajo intentaremos construir un modelo que relacione estas variables, analizando tanto el efecto individual de cada uno de los factores antes mencionados sobre el deseo de tener más hijos, como sus posibles interacciones.

Otro aspecto importante en el análisis demográfico es la prevalencia de uso de anticonceptivos. Se puede observar que un método moderno que está siendo bastante utilizado es la esterilización femenina. Este método es el más efectivo, además el costo es relativamente bajo, pero la decisión de usarlo puede estar relacionado con el nivel de conocimientos, la edad, el número de hijos que ya tiene, etc por lo que consideramos interesante construir un modelo que explique la prevalencia de uso de este método a partir de las variables edad, número de hijos y área de residencia.

3.1 MODELO PARA LA VARIABLE "DESEO DE TENER MÁS HIJOS"

Como la variable dependiente ***"deseo de tener más hijos"*** tiene dos categorías de respuesta y considerando además que el tamaño de muestra es fijado, podemos suponer que esta variable está caracterizada por una distribución binomial. Además definimos como el evento de interés la categoría de respuesta ***"No desea tener más hijos"***

CUADRO Nº 3.1: Definición de variables

TIPO DE VARIABLE	**VARIABLE**	**CATEGORÍAS**
Variable respuesta	Deseo de tener más hijos	No desea Desea
Variables independientes, covariables o factores	Número de hijos vivos **(hijos)**	De 1 a 2 hijos De 3 a 4 hijos De 5 a más hijos
	Nivel de educación **(educ)**	Ninguna Primaria Secundaria Superior
	Edad	De 21 a 35 años De 36 a 45 años
	Trabaja actualmente **(ocup)**	Trabaja No trabaja
	Estado Conyugal **(Econ)**	No unida Unida
	Area de residencia **(zona).**	Rural Urbano

Las 14076 mujeres, clasificadas de acuerdo a las variables mencionadas en el cuadro 3.1, forman una tabla de contingencia con 105 subpoblaciones (ver tabla B.1 del apéndice B).

En las celdas vacías, correspondientes a la categoría "sí desea tener más hijos", de las subpoblaciones 46, 85, 90, 95, 97, 104 y 105 adicionamos 0.5 en cada una de ellas. Como son sólo 7 casos el sesgo que se introduce con esta solución no es significativo.

Al analizar la relación entre la variable respuesta y las covariables en esta tabla de contingencia, bajo el enfoque GSK, encontramos que no existía diferencia significativa en las respuestas de las mujeres sin educación y aquellas con estudios primarios, razón por la cual unimos estas dos categorías quedando la variable nivel de educación con tres categorías: ningún nivel/ primaria, secundaria y superior.

Con esta nueva categorización, el número de subpoblaciones se redujo de 105 a 89, con un mínimo de 21 observaciones por subpoblación. Además se adicionó 0.5 a la categoría "*sí desea tener más hijos*" de las subpoblaciones 74, 80, 81, 88 y 89 que presentaban celdas vacías.(tabla B.2 del apéndice B).

Considerando a la categoría de respuesta ***"no desea tener más hijos"***. como el evento de interés, el vector de funciones respuesta definido a partir de las probabilidades (ver tabla B.3) es dada por:

$$\mathbf{F = A\,\pi}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_{89} \end{bmatrix}_{89\times 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{89\times 178} \begin{bmatrix} \pi_{11} \\ \pi_{12} \\ \pi_{21} \\ \pi_{22} \\ \vdots \\ \pi_{i1} \\ \pi_{i2} \\ \vdots \\ \pi_{89,1} \\ \pi_{89,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{11} \\ \pi_{21} \\ \vdots \\ \pi_{i1} \\ \vdots \\ \pi_{89,1} \end{bmatrix}_{89\times 1}$$

Para el cálculo de la matriz de covarianza estimada (2.28) en la i-ésima subpoblación usamos las probabilidades estimadas que se presentan en la tabla B.3.

$$\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{i}} = \frac{1}{\mathbf{n_{i+}}} \begin{bmatrix} \mathbf{p_{i1}}(1-\mathbf{p_{i1}}) & -\mathbf{p_{i1}}\mathbf{p_{i2}} \\ -\mathbf{p_{i2}}\mathbf{p_{i1}} & \mathbf{p_{i2}}(1-\mathbf{p_{i2}}) \end{bmatrix}_{2\times 2}, \text{ i=1,2...,89}$$

Así por ejemplo, para la primera subpoblación donde se encuentran las mujeres que tienen uno o dos hijos vivos, que alcanzaron un nivel de estudios primarios como máximo, con edades entre 21 y 35 años, que actualmente tienen pareja, que no trabajan y viven en la zona rural,

p_{11}= probabilidad de no desear tener más hijos= 0.58912
p_{12}= probabilidad de desear tener más hijos= 0.41088
n_{1+}= total de mujeres en esta subpoblación= 331

$$\hat{\mathbf{V}}_1 = \frac{1}{331} \begin{bmatrix} (0.58912)(0.41088) & -(0.58912)(0.41088) \\ -(0.58912)(0.41088) & (0.41088)(0.58912) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000731 & -0.000731 \\ -0.000731 & 0.000731 \end{bmatrix}$$

Para las 89 subpoblaciones $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{p}}$ (2.9), será una matriz diagonal $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{p}} = \mathbf{Diag}\{\hat{\mathbf{V}}_1,..., \hat{\mathbf{V}}_{89}\}$de orden 89x89.

Finalmente, usando (2.30), calculamos la matriz de covarianza estimada del vector de función respuesta observado, $\mathbf{V_F = A\ \hat{V}_p\ A'}$.

En el cuadro 3.2 presentamos las funciones respuestas y varianzas estimadas para cada subpoblación.

CUADRO Nº 3.2: Función respuesta y varianza estimada

Subpoblación	Función Observada	Varianza
1	0.5891	0.000731
2	0.5828	0.000838
3	0.6208	0.000531
4	0.5654	0.001037
5	0.8727	0.002020
6	0.7167	0.003384
7	0.8252	0.001400
8	0.7755	0.003553
9	0.7143	0.0097
10	0.7593	0.003385
11	0.6829	0.005281
12	0.7200	0.002688
13	0.7917	0.006872
14	0.9143	0.002239
15	0.8696	0.004931
16	0.5025	0.001244
17	0.5085	0.000284
18	0.5547	0.001000
19	0.4690	0.000309
20	0.5526	0.006506
21	0.6013	0.001567
22	0.6552	0.003895
23	0.5561	0.001204
24	0.7573	0.001785
25	0.7372	0.001414
26	0.7500	0.005208
27	0.7321	0.003502
28	0.5000	0.007353
29	0.3793	0.000677
30	0.4466	0.002400
31	0.3942	0.000316
32	0.5106	0.005317
33	0.4393	0.001424
34	0.6618	0.003292
35	0.5909	0.0110
36	0.6911	0.000868
37	0.6575	0.003085
38	0.8538	0.000268
39	0.8827	0.000337
40	0.8724	0.000180
41	0.8996	0.000395
42	0.9231	0.002731
43	0.9600	0.000768
44	0.9655	0.001148
45	0.8830	0.001099
46	0.9219	0.000563
47	0.9296	0.000307
48	0.9200	0.000368
49	0.9500	0.002375
50	0.9661	0.000555
51	0.9500	0.001188
52	0.7982	0.001478
53	0.8606	0.000293
54	0.8389	0.000907
55	0.8438	0.000361
56	0.9615	0.001422
57	0.8788	0.003228
58	0.9130	0.003452
59	0.8854	0.000647
60	0.9375	0.001831
61	0.9025	0.000373
62	0.8261	0.006246
63	0.8372	0.003170
64	0.8750	0.002279
65	0.9167	0.003183
66	0.8049	0.001277
67	0.8810	0.002497
68	0.8768	0.000783
69	0.8621	0.004100
70	0.9589	0.000180
71	0.9612	0.000362
72	0.9514	0.000107
73	0.9882	0.000137
74	0.9767	0.001057
75	0.9523	0.000114
76	0.9612	0.000144
77	0.9777	0.000035
78	0.9709	0.000103
79	0.9524	0.002160
80	0.9935	0.0000827
81	0.9890	0.000239
82	0.9804	0.000377
83	0.9524	0.002160
84	0.9623	0.000685
85	0.9785	0.000226
86	0.9474	0.001312
87	0.9630	0.000440
88	0.9787	0.000886
89	0.9836	0.000529

Una vez definido el vector de funciones observadas **F**, intentaremos relacionar esta función con las covariables definidas en el cuadro Nº 3.1 a través del modelo:

$$\mathbf{F} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

La matriz de diseño **X** fue definida utilizando la parametrización del punto central, explicada en el capítulo 1. Para la variable Nivel de Educación se tomó como nivel de referencia la categoría "educación superior"; para la variable número de hijos la categoría "5 hijos a más"; para la variable edad la categoría de 36 a 45 años; para la variable estado conyugal la categoría no unida; para la variable ocupación actual la categoría no trabaja actualmente, y para la variable área de residencia la categoría rural. Considerando además la presencia del intercepto, se obtiene una matriz X con 89 filas y 25 columnas (tabla B.5).

El vector de parámetros $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_6 & \cdots & \beta_{24}\end{bmatrix}$ puede interpretarse como:

β_0 **(Intercepto):** Efecto de no desear tener más hijos sin considerar las covariables.

β_1 Efecto diferencial de la categoría "1 ó 2 hijos".

β_2 Efecto diferencial de la categoría "3 ó 4 hijos".

β_3**:** Efecto diferencial de la categoría "ningún nivel/ primaria".

β_4 Efecto diferencial de la categoría "secundaria".

β_5 Efecto diferencial de la categoría "21 a 35 años".

β_6 Efecto diferencial de la categoría "estado conyugal unida".

β_7 Efecto diferencial de la categoría "trabajar".

β_8 Efecto diferencial de la categoría "zona de residencial urbana".

β_9 Efecto diferencial de la interacción entre las categorías "1 ó 2 hijos" y "primaria" de las variables número de hijos y nivel de educación respectivamente.

β_{10} Efecto diferencial de la interacción entre las categorías "1 ó 2 hijos" y "secundaria" de las variables número de hijos y nivel de educación respectivamente.

β_{11} Efecto diferencial de la interacción entre las categorías "3 ó 4 hijos" y "primaria" de las variables número de hijos y nivel de educación respectivamente $\vdots$

β_{24} Efecto diferencial de la interacción entre las categorías "3 ó 4 hijos", "21 a 35 años" y "rural" de las variables número de hijos, edad y zona de residencia respectivamente.

Cuadro Nº 3.3: Tabla de significación de los parámetro

FUENTE DE VARIACION	G.L	CHI CUADRADO	P-VALUE
Intercepto	1	12811.67	0.0000
Hijos	2	529.10	0.0000
Educ	2	67.58	0.0000
Edad	1	41.71	0.0000
Econ	1	6.30	0.0121
Ocup	1	2.21	0.1375
Area	1	3.15	0.0759
Hijos*educ	4	35.44	0.0000
Hijos*edad	2	61.38	0.0000
Hijos*econ	2	20.12	0.0000
Educ*edad	2	6.22	0.0446
Educ*econ	2	15.59	0.0004
Edad*econ	1	6.71	0.0096
Ocup*área	1	2.47	0.1157
Hijos*edad*área	2	20.33	0.0000
Residual	64	52.58	0.8453

Para evaluar la bondad de ajuste del modelo, utilizamos la estadística de Wald (2.33) que toma el valor $Q_w = 52.58$, con 64 gl, el cual es significativo a un nivel de confianza del 15%.

Todas las variables son significativas a un nivel del 5%, con excepción de ocupación actual , que es significativo al 14%; y el término interacción de segundo orden entre las variables ocupación actual y área de residencia, a un nivel de significancia del 12% (cuadro Nº 3.3).

El vector de parámetros estimados **b**, para el modelo ajustado $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{Ap} = \mathbf{Xb}$ se muestra en el cuadro Nº 3.4

Ahora estudiaremos el efecto diferencial de cada una de las variables sobre la probabilidad del no deseo de tener más hijos.

Una de las variables más relevantes es el número de hijos que ya tiene la mujer, es decir, las mujeres que tiene 1 ó 2 hijos tiene una mayor probabilidad de desear tener más hijos mientras que a medida que aumenta el número de hijos vivos la probabilidad de no desear más hijos aumenta. Igualmente se puede observar que las interacciones del número de hijos y las demás variables como la edad, estado conyugal y area geográfica son las más significativas.

CUADRO Nº 3.4: Parámetros estimados por el método de MCP

Efectos		Parámetro	Estimador	Error Estándar
Intercepto		b_0	0.8278	0.00731
Número de hijos vivos	1 ó 2 hijos	b_1	-0.1831	0.00796
	3 ó 4 hijos	b_2	0.0531	0.00707
Nivel de educación	Primaria	b_3	0.0603	0.00751
	Secundaria	b_4	-0.00108	0.00771
Edad	21-35 años	b_5	-0.0350	0.00541
Estado conyugal	No unida	b_6	-0.0143	0.00569
Trabaja actualmente	Ama de casa	b_7	-0.00392	0.00264
Area de residencia	Rural	b_8	-0.00537	0.00302
Número de hijos por Nivel de educación	1 ó 2 hijos y hasta primaria	b_9	0.0452	0.00804
	1 ó 2 hijos y secundaria	b_{10}	-0.00131	0.00783
	3 ó 4 hijos y hasta primaria	b_{11}	-0.0134	0.00653
	3 ó 4 hijos y secundaria	b_{12}	-0.00372	0.00695
Número de hijos por edad	1 ó 2 hijos y 21-35 años	b_{13}	-0.0484	0.00657
	3 ó 4 hijos y 21-35 años	b_{14}	0.0153	0.00448
Número de hijos por Estado conyugal	1 ó 2 hijos y no unida	b_{15}	-0.0308	0.00695
	3 ó 4 hijos y no unida	b_{16}	0.0100	0.00523
Nivel de educación por Estado conyugal	Hasta primaria y no unida	b_{17}	-0.0272	0.00694
	Secundaria y no unida	b_{18}	0.000028	0.00714
Nivel de educación por edad	Hasta primaria y 21-30 años	b_{19}	0.0131	0.00525
	Secundaria y 21-30 años	b_{20}	0.00148	0.00541
Edad por Estado conyugal	21-35 años y no unida	b_{21}	-0.0116	0.00446
Ocupación por zona de residencia	Ama de casa y zona rural	b_{22}	-0.00407	0.00259
Número de hijos por edad por zona de residencia	1 ó 2 hijos; entre 21-35 años y zona rural	b_{23}	0.0208	0.00463
	3 ó 4 hijos; entre 21-35 años y zona rural	b_{24}	-0.0122	0.00407

Análisis exploratorio de los residuos

El análisis de los residuos del ajuste del modelo, nos permite establecer la adecuación del mismo; por ejemplo esperamos que los residuos tengan un comportamiento aleatorio con media cero y varianza constante y además que no existan datos atípicos.

Si bien es cierto que el análisis de residuos implica no sólo el uso de técnicas exploratorias sino también confirmatorias, el estudio de técnicas de análisis confirmatorio escapa de los objetivos de este trabajo por lo que solamente realizaremos el análisis exploratorio de los residuos del conjunto de datos.

Para empezar, presentamos la tabla de residuos, conjuntamente con las funciones observadas y estimadas. (cuadro Nº 3.5)

CUADRO Nº 3.5: valores observados y predecidos de las funciones respuesta

Sub Población	OBSERVADOS		ESTIMADOS		Residuos
	Función. Observada	Error Estandar (F. observ)	Función estimada	Error estandar (F.estimada)	
1	0.58912387	0.02704237	0.60346761	0.01398832	-0.0143437
2	0.58275862	0.02895603	0.58074316	0.01377225	0.00201546
3	0.62076749	0.02305236	0.61944142	0.01341485	0.00132608
4	0.56540084	0.03219945	0.58043721	0.01351857	-0.0150364
5	0.87272727	0.04493923	0.77126589	0.01954467	0.10146139
6	0.71666667	0.05817439	0.74854143	0.01909689	-0.0318748
7	0.82524272	0.0374188	0.78723969	0.01877781	0.03800303
8	0.7755102	0.05960655	0.74823549	0.01899753	0.02727472
9	0.71428571	0.09858079	0.72565281	0.02439602	-0.0113671
10	0.75925926	0.0581799	0.78612263	0.02094691	-0.0268634
11	0.68292683	0.0726733	0.74162661	0.02383607	-0.0586998
12	0.72	0.05184593	0.78581669	0.02083357	-0.0658167
13	0.79166667	0.08289817	0.90766802	0.02331092	-0.1160014
14	0.91428571	0.04731878	0.863172	0.02545484	0.05111371
15	0.86956522	0.07022373	0.90736208	0.02315431	-0.0377969
16	0.50248756	0.03526684	0.51115322	0.01358217	-0.0086657
17	0.50851305	0.01684299	0.48842877	0.0108839	0.02008429
18	0.55465587	0.03162359	0.52712703	0.01254861	0.02752885
19	0.46898263	0.01757783	0.48812282	0.01090108	-0.0191402
20	0.55263158	0.08066009	0.62446412	0.02028049	-0.0718325
21	0.60130719	0.03958418	0.60173966	0.01874144	-0.0004325
22	0.65517241	0.06241153	0.64043792	0.01966726	0.01473449
23	0.55609756	0.03470103	0.60143372	0.01851014	-0.0453362
24	0.75728155	0.04224365	0.71702526	0.02019005	0.0402563
25	0.73722628	0.03760374	0.71671931	0.02001486	0.02050696
26	0.75	0.07216878	0.78408327	0.02561761	-0.0340833
27	0.73214286	0.05917735	0.78377732	0.02519024	-0.0516345
28	0.5	0.08574929	0.42149523	0.01646983	0.07850477
29	0.37931034	0.02601028	0.39877077	0.01392143	-0.0194604
30	0.44660194	0.04898471	0.43746903	0.01544542	0.00913291
31	0.39417989	0.0177729	0.39846483	0.01329505	-0.0042849
32	0.5106383	0.07291599	0.45776225	0.02854857	0.05287605
33	0.43930636	0.03773319	0.4574563	0.02802779	-0.0181499
34	0.66176471	0.0573729	0.65944198	0.0219199	0.00232272
35	0.59090909	0.10482356	0.61494596	0.02371469	-0.0240369
36	0.69105691	0.02945972	0.65913604	0.02133288	0.03192087
37	0.65753425	0.05554006	0.67187462	0.03225122	-0.0143404

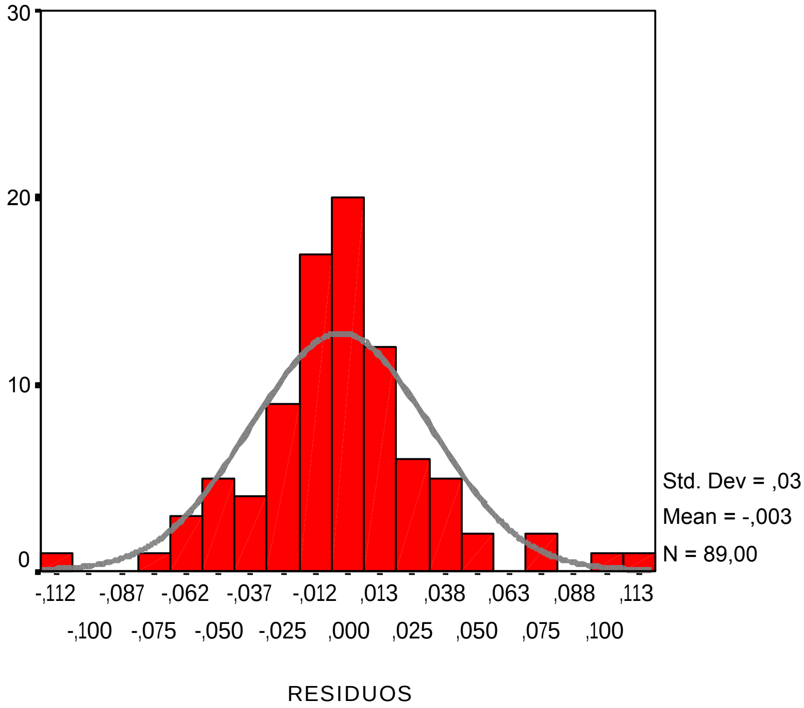
continuación

Sub Población	OBSERVADOS		ESTIMADOS		Residuos
	Función. Observada	Error Estandar (F. observ)	Función estimada	Error estandar (F.estimada)	
38	0.85376344	0.0163859	0.85250185	0.01017258	0.0012616
39	0.88273616	0.01836235	0.89582225	0.01024814	-0.0130861
40	0.8723748	0.01341141	0.86847565	0.00917192	0.00389915
41	0.89956332	0.01986298	0.89551631	0.00996682	0.00404701
42	0.92307692	0.05225894	0.98196754	0.01680833	-0.0588906
43	0.96	0.02771281	0.95462094	0.01664678	0.00537906
44	0.96551724	0.03388301	0.9816616	0.01671709	-0.0161444
45	0.88297872	0.03315459	0.91327332	0.01279286	-0.0302946
46	0.921875	0.02372062	0.90769828	0.01126537	0.01417672
47	0.92957746	0.01753109	0.92924712	0.01158229	0.00033034
48	0.92	0.01918333	0.90739233	0.01071416	0.01260767
49	0.95	0.04873397	0.94759068	0.01632879	0.00240932
50	0.96610169	0.02355995	0.96913952	0.01602414	-0.0030378
51	0.95	0.03446012	0.94728473	0.01585757	0.00271527
52	0.79816514	0.03844423	0.81642544	0.01328429	-0.0182603
53	0.8606357	0.01712473	0.85974585	0.01083854	0.00088985
54	0.83892617	0.03011489	0.83239924	0.01232109	0.00652693
55	0.84383562	0.01900087	0.8594399	0.01104908	-0.0156043
56	0.96153846	0.03771464	0.89140376	0.0214617	0.0701347
57	0.87878788	0.05681436	0.89109781	0.02134742	-0.0123099
58	0.91304348	0.05875338	0.90041393	0.01491701	0.01262955
59	0.88535032	0.02542694	0.89483889	0.01305859	-0.0094886
60	0.9375	0.04279082	0.91638773	0.01401561	0.02111227
61	0.90254237	0.01930571	0.89453294	0.01261352	0.00800943
62	0.82608696	0.0790342	0.88024391	0.02322261	-0.054157
63	0.8372093	0.0562986	0.87993797	0.02264252	-0.0427287
64	0.875	0.04773516	0.8335698	0.02244515	0.0414302
65	0.91666667	0.05641693	0.80622319	0.02258442	0.11044347
66	0.80487805	0.03573268	0.83326385	0.02221571	-0.0283858
67	0.88095238	0.0499703	0.90073755	0.0212289	-0.0197852
68	0.87681159	0.02797683	0.90043161	0.02057816	-0.02362
69	0.86206897	0.06403288	0.83151721	0.0363057	0.03055176
70	0.95890411	0.0134142	0.94335856	0.0090576	0.01554555
71	0.96116505	0.0190367	0.97938066	0.00962314	-0.0182156
72	0.95138889	0.01034677	0.95933236	0.00799301	-0.0079435
73	0.98823529	0.0116953	0.97907471	0.00872905	0.00916058
74	0.97674419	0.03250401	1.0237859	0.01938618	-0.0470417
75	0.95226131	0.01068739	0.96105164	0.00769148	-0.0087903
76	0.96124031	0.01201701	0.96277491	0.00741594	-0.0015346
77	0.97770701	0.00589127	0.97702544	0.00508101	0.00068156
78	0.97090909	0.01013448	0.96246896	0.00684117	0.00844013
79	0.95238095	0.04647143	0.98097556	0.01016191	-0.0285946
80	0.99354839	0.00909448	0.99522610	0.00775001	-0.0016777
81	0.98901099	0.01545518	0.98066962	0.0091683	0.00834137
82	0.98039216	0.01941466	0.97048678	0.01319616	0.00990538
83	0.95238095	0.04647143	0.95043848	0.01456206	0.00194247
84	0.96226415	0.02617498	0.97018083	0.01356388	-0.00791670
85	0.97849462	0.0150422	0.97709804	0.01073478	0.00139658

continuación

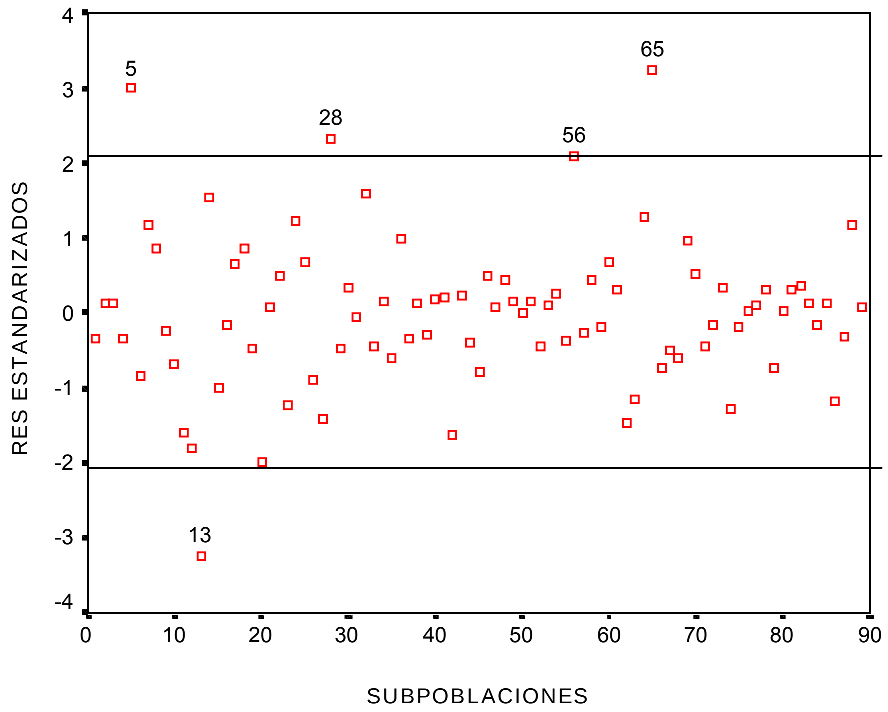
Sub Población	OBSERVADOS		ESTIMADOS		Residuos
	Función. Observada	Error Estandar (F. observ)	Función estimada	Error estandar (F.estimada)	
86	0.94736842	0.03622354	0.99134858	0.01162088	-0.04398020
87	0.96296296	0.02098362	0.9767921	0.01112133	-0.01382910
88	0.9787234	0.02976783	0.94050537	0.01990698	0.03821803
89	0.98360656	0.02299301	0.98360656	0.02299301	0

Gráfico Nº 1: Histograma de los residuos



Observando el histograma, vemos que la media (-0.003) es un valor muy cercano a cero; con un apuntamiento de 2.24 lo cual indica una leve asimetría a la derecha; en cuanto a la dispersión de los datos, la varianza toma el valor 0.001.

Gráfico Nº 2: Comportamiento general de los residuos estandarizados



Los residuos estandarizados no presentan ningún patrón de comportamiento. Por conocimientos básicos de estadística, sabemos que para considerar una aproximación normal, el 68% de los residuos estandarizados deberán caer entre los valores -1 y 1; el 95% de los mismos, deberán caer entre -2 y 2 y el 99.7% entre -3 y 3. Como puede observarse en el gráfico anterior, esto se cumple, pues de los 89 residuales 4 se encuentran fuera del intervalo [-2, 2] que representan el 4.5% y corresponden a las subpoblaciones 5, 13, 28 y 65. Fuera del intervalo [-3, 3] hay 2 residuales correspondientes a las subpoblaciones 13 y 65 que representan el 2.2% del total de residuos. Por todo esto, podemos considerar hasta ahora, que los residuos presentan un comportamiento aproximadamente normal.

Gráfico Nº 3: Probabilidad Normal de los residuos estandarizados:

En el gráfico de probabilidad normal, se observa una desviación de la linea recta, lo cual nos indica que la curva tiene colas más pesadas de la normal. Sin embargo, podemos considerar una aproximación aceptable a la curva normal.

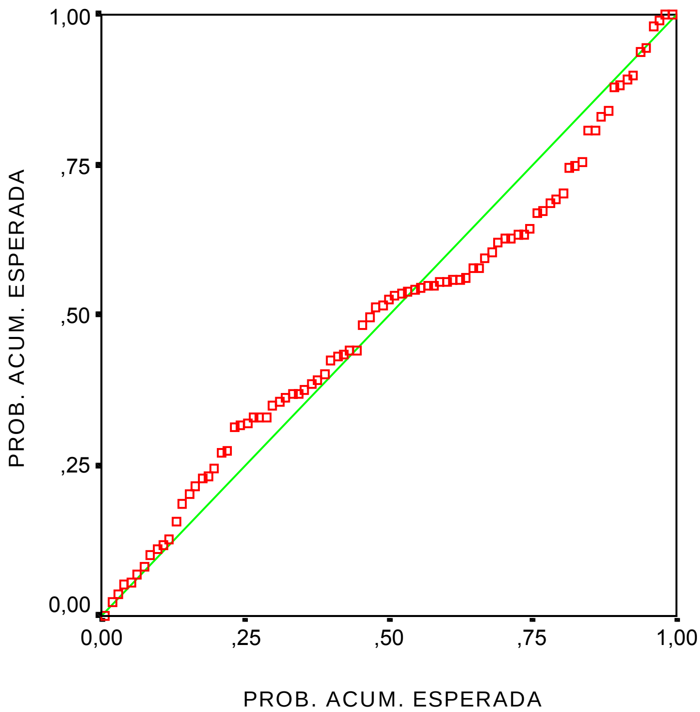
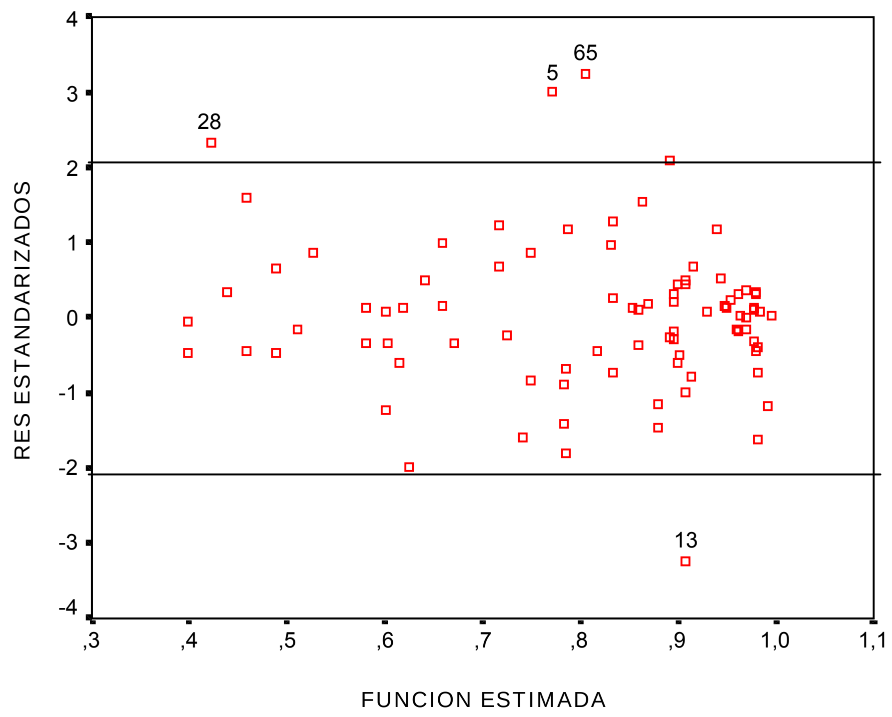


Gráfico Nº 4: Residuos estandarizados vs Funciones estimadas

En general puede observarse que los residuos tienen un comportamiento homocedásticos, pues en su mayoría se encuentran alrededor de cero. En particular los residuos correspondientes a las subpoblaciones 5, 13, 28 y 65 presentan un comportamiento diferente. Y son las mismas que aparecen en el gráfico.

Por ello se haría necesaria estudiar estos datos para ver si son influyentes. Este análisis, como ya mencionamos, escapa del alcance de este trabajo.



Como el modelo representa adecuadamente a los datos, podemos probar distintas hipótesis de interés, utilizando la estadística de Wald (2.31). A continuación, presentamos algunas de ellas:

a) H_0 : El deseo de no tener más hijos, es el mismo para las mujeres que tienen 1 ó 2 hijos y aquellas que tienen 3 ó 4 hijos.

$$\beta_1 = \beta_2$$
$$\beta_1 \neq \beta_2$$

El vector c es: c = [0 1 -1 0 0, ...,0]
La estadistica chi-cuadrada de Wald asociada a esta hipótesis es:

H_0	g.l	Chi-cuadrado	p-value
$\beta_1 = \beta_2$	1	374.89	0.0000

Entonces, rechazamos la hipótesis nula a un nivel de significancia del 0.05. Es decir, existen diferencias en el deseo de tener hijos entre las mujeres con 1 ó 2 hijos y aquellas que tienen 3 ó 4 hijos. Esto coincide con lo representado por los parámetros estimados, pues mientras las primeras aún desean más hijos, la probabilidad de no deseo se incrementa para el segundo grupo.

b) H_0 : El deseo de no tener más hijos, es el mismo entre las mujeres que siguieron a lo más estudios primarios y aquellas que tienen estudios secundarios

$$\beta_3 = \beta_4$$
$$\beta_3 \neq \beta_4$$

El vector de contraste c, es: c = [0,....0,1 -1]

La estadistica chi-cuadrada de Wald asociada a esta hipótesis es:

H_0	g.l	Chi-cuadrado	p-value
$\beta_3 = \beta_4$	1	40.6	0.0000

Entonces para un nivel de significancia del 0.05,se rechaza la hipótesis nula. Lo cual significa, que la percepción sobre el tener o no más hijos es diferente entre las mujeres pertenecientes a estas dos categorías de educación. Este resultado ya podía visualizarse a partir de los parámetros estimados (b_3 y b_4), pues mientras que entre las mujeres con estudios primarios, el efecto diferencial es positiva, ocurre lo contrario para aquellas mujeres con un grado de instrucción mayor.

c) H_0 : El deseo de no tener más hijos es el mismo tanto para las mujeres que tienen 1 ó 2 hijos y nivel de estudios primario o ninguno, como para aquellas que tienen 3 ó 4 hijos y el mismo nivel de estudios.

$$\beta_9 = \beta_{11}$$
$$\beta_9 \neq \beta_{11}$$

La estadistica chi-cuadrada de Wald asociada a esta hipótesis es:

H_0	g.l	Chi-cuadrado	p-value
$\beta_9 = \beta_{11}$	1	23.15	0.0000

Entonces para un nivel de significancia del 0.05, podemos rechazar la hipótesis nula. En otras palabras, aquellas que tienen a lo más estudios primarios, tienen percepciones diferentes sobre el querer o no tener más hijos.

d) H_0 : El deseo de no tener más hijos es el mismo tanto para las mujeres que tienen de 1 a 2 hijos y nivel de estudios secundarios como para aquellas que tienen de 3 a 4 hijos y el mismo nivel de estudios.

$$\beta_{10} = \beta_{12}$$
$$\beta_{10} \neq \beta_{12}$$

La estadistica chi-cuadrada de Wald asociada a esta hipótesis es:

H_0	g.l	Chi-cuadrado	p-value
$\beta_{10} = \beta_{12}$	1	0.04	0.8414

Entonces para un nivel de significancia del 0.05, no podemos rechazar la hipótesis nula. Esto es, no hay diferencias en cuanto al deseo de tener más hijos entre aquellas mujeres con educación secundaria y que tienen a lo más 4 hijos. Ambos grupos tienen una relación inversa con la función respuesta.

e) H_0 : El deseo de no tener más hijos es el mismo tanto para las mujeres que tienen 1 ó 2 hijos y edades entre 21 y 35 años como para aquellas que tienen de 3 a 4 hijos en la misma categoría de edad.

$$\beta_{13} = \beta_{14}$$
$$\beta_{13} \neq \beta_{14}$$

La estadistica chi-cuadrada de Wald asociada a esta hipótesis es:

H_0	g.l	Chi-cuadrado	p-value
$\beta_{13} = \beta_{14}$	1	38.62	0.0000

Entonces para un nivel de significancia del 0.05, podemos rechazar la hipótesis nula. Esto nos dice que existen diferencias.

3.2 MODELO PARA LA VARIABLE "NÚMERO DE MUJERES ESTERILIZADAS"

La esterilización femenina es uno de los métodos más modernos de planificación familiar, sin embargo sólo el 6% de las mujeres en edad fértil utilizan este método. Esta situación puede deberse a que aun un gran número de mujeres prefieren los métodos tradicionales y a que muchas veces las mujeres sólo quieren espaciar los embarazos y por lo tanto prefieren otro método alternativo.
Para modelar la variable ***"número de mujeres esterilizadas"*** usaremos como covariables las siguientes:

Edad: Categorizada en 3 niveles, de 20 a 29 años, de 30-39 años y de 40-49 años.
Número de hijos vivos: Con 3 categorías, de 1-2 hijos, de 3 a 4 hijos y de 5 a más hijos.
Area de residencia: Con 2 categorías, urbano y rural.

Es importante señalar, que inicialmente, también se consideró la variable nivel de educación, pero el modelo obtenido resultó deficiente.

Las 1840 mujeres esterilizadas que presentan las características que mencionamos se distribuyen en 18 subpoblaciones (Cuadro Nº 3.6).

Podemos observar (Cuadro Nº 3.6) que el mayor número de mujeres esterilizadas se encuentran en las subpoblaciones 5 (22%), 6 (25%), 8 (25%) y 9 (21%); que corresponde a grupos formados por mujeres que viven en el área urbana, tienen 3 ó más hijos y con edades entre 20-39 años.
Como las mujeres esterilizadas representan sólo el 11% de aquellas que usan algún método de planificación familiar; y al 6% del total de mujeres entrevistadas (22894), la identificación de una mujer que optó por este método puede considerarse como un evento raro dentro de una población grande y por lo tanto es razonable modelarla utilizando la distribución poisson.

CUADRO Nº 3.6: Distribución de las mujeres que optaron por el método de esterilización

SUB POBLACIONES	**EDAD (años)**	**HIJOS**	**AREA**	**N. de mujeres esterilizadas**	**Muestra no expuesta**
1	20-29	0-2	Urbano	21	5706
2	20-29	0-2	Rural	12	2162
3	20-29	3 a 4	Urbano	54	798
4	20-29	3 a 4	Rural	36	986
5	20-29	5 a +	Urbano	12	86
6	20-29	5 a +	Rural	5	173
7	30-39	0-2	Urbano	105	2451
8	30-39	0-2	Rural	26	597
9	30-39	3 a 4	Urbano	428	1912
10	30-39	3 a 4	Rural	84	915
11	30-39	5 a +	Urbano	206	825
12	30-39	5 a +	Rural	119	1197
13	40-49	0-2	Urbano	63	878
14	40-49	0-2	Rural	8	230
15	40-49	3 a 4	Urbano	298	1193
16	40-49	3 a 4	Rural	36	397
17	40-49	5 a +	Urbano	251	1143
18	40-49	5 a +	Rural	76	1245

De la expresión (2.14) se tiene que las tasas de prevalencia de esterilización femenina para la hik-ésima subpoblacion es:

$$\mathbf{D}_{\mu} = \mathbf{D}_{\mathbf{N}}\mathbf{D}_{\lambda}$$

h=1,2
i= 1,2,3
k= 1,2

En el cuadro Nº 3.7, se muestran las tasas de prevalencia para cada subpoblación.

CUADRO Nº 3.7: Tasas de prevalencia para las 18 subpoblaciones

SUB POBLACIONES	EDAD (años)	HIJOS	AREA	Tasas de Prevalencia μ_{hik}
1	20-29	0-2	Urbano	μ_{111}
2	20-29	0-2	Rural	μ_{112}
3	20-29	3 a 4	Urbano	μ_{121}
4	20-29	3 a 4	Rural	μ_{122}
5	20-29	5 a +	Urbano	μ_{131}
6	20-29	5 a +	rural	μ_{132}
7	30-39	0-2	urbano	μ_{211}
8	30-39	0-2	rural	μ_{212}
9	30-39	3 a 4	urbano	μ_{221}
10	30-39	3 a 4	rural	μ_{222}
11	30-39	5 a +	urbano	μ_{231}
12	30-39	5 a +	rural	μ_{232}
13	40-49	0-2	urbano	μ_{311}
14	40-49	0-2	rural	μ_{312}
15	40-49	3 a 4	urbano	μ_{321}
16	40-49	3 a 4	rural	μ_{322}
17	40-49	5 a +	urbano	μ_{331}
18	40-49	5 a +	rural	μ_{332}

Para el modelo loglineal dado en (2.18), la función respuesta será construida a partir del logaritmo de la proporción de mujeres esterilizadas (tasa de prevalencia),

$$\mathbf{F}(\mu) = \mathbf{log D}_\lambda = \log(\mathbf{D}_\mathbf{N}^{-1}\mathbf{D}_\mu)$$

Donde la matriz **A** que genera la función **F** es $\mathbf{D}_\mathbf{N}^{-1}$.
De (2.19) las tasas de prevalencia **($\mathbf{D}_\lambda$)** son estimadas por:

$$\mathbf{D}_{\hat{\lambda}} = \mathbf{D}_\mathbf{N}^{-1}\mathbf{D}_\mathbf{n}$$

Luego, de (2.32), la matriz de covarianza estimada de la función es

$$\mathbf{V}_\mathbf{F} = \mathbf{D}_\mathbf{n}^{-1}$$

En el cuadro Nº. 3.8, se presentan las funciones estimadas y sus respectivas varianzas estimadas

CUADRO Nº 3.8: Funciones estimadas y sus varianzas estimadas

SUB POBLAC	EDAD	HIJOS	AREA	Tasa Estimada $\hat{\lambda}_{hik}$	Función Respuesta Estimada: Log($\hat{\lambda}_{hik}$)	Varianza Estimada (1/n_{hik})
1	20-29	0-2	urbano	0,00368034	-2,43411247	0,04761905
2	20-29	0-2	rural	0,00555042	-2,25567444	0,08333333
3	20-29	3 a 4	urbano	0,06766917	-1,16960913	0,01851852
4	20-29	3 a 4	rural	0,03651116	-1,43757441	0,02777778
5	20-29	5 a +	urbano	0,13953488	-0,85531721	0,08333333
6	20-29	5 a +	rural	0,02890173	-1,5390761	0,2
7	30-39	0-2	urbano	0,04283966	-1,36815401	0,00952381
8	30-39	0-2	rural	0,04355109	-1,36100098	0,03846154
9	30-39	3 a 4	urbano	0,22384937	-0,65004412	0,00233645
10	30-39	3 a 4	rural	0,09180328	-1,03714181	0,01190476
11	30-39	5 a +	urbano	0,24969697	-0,60258673	0,00485437
12	30-39	5 a +	rural	0,0994152	-1,00254719	0,00840336
13	40-49	0-2	urbano	0,07175399	-1,14415397	0,01587302
14	40-49	0-2	rural	0,03478261	-1,45863785	0,125
15	40-49	3 a 4	urbano	0,24979044	-0,60242418	0,0033557
16	40-49	3 a 4	rural	0,0906801	-1,04248801	0,02777778
17	40-49	5 a +	urbano	0,21959755	-0,65837251	0,00398406
18	40-49	5 a +	rural	0,06104418	-1,21435576	0,01315789

Para el modelo:

$$\mathbf{D}_{\mu} = \mathbf{D}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{exp(X\beta)}$$

Su equivalente modelo loglineal formulado en (3.4),

$$\mathbf{log\, D}_{\hat{\lambda}} = \mathbf{X\beta}$$

Para la construcción de la matriz X se uso la misma parametrización que para la multinomial. Para la variable edad, se usó como nivel de referencia el grupo etáreo de 40-49 años; para la variable número de hijos, la categoría de 5 a más hijos; y para la variable área de residencia, la categoría rural. (cuadro Nº 3.9).

CUADRO 3.9: Matriz de diseño

Subpob	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0
2	1	1	0	1	0	-1	-1	0	1	0	0	0
3	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
4	1	1	0	0	1	-1	0	-1	0	1	0	0
5	1	1	0	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	0	0
6	1	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	0	0
7	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
8	1	0	1	1	0	-1	-1	0	0	0	1	0
9	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
10	1	0	1	0	1	-1	0	-1	0	0	0	1
11	1	0	1	-1	-1	1	-1	-1	0	0	-1	-1
12	1	0	1	-1	-1	-1	1	1	0	0	-1	-1
13	1	-1	-1	1	0	1	1	0	-1	0	-1	0
14	1	-1	-1	1	0	-1	-1	0	-1	0	-1	0
15	1	-1	-1	0	1	1	0	1	0	-1	0	-1
16	1	-1	-1	0	1	-1	0	-1	0	-1	0	-1
17	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1
18	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1

Este modelo, incluye los efectos principales de todas las covariables y las interacciones de segundo orden entre las variables área de residencia con número de hijos; y edad con número de hijos.

CUADRO Nº 3.10: Tabla de análisis de varianza

FUENTE DE VARIACIÓN	G.L	CHI CUADRADO	P-VALUE
Intercepto	1	722.86	0.0000
Edad	2	32.05	0.0000
Hijos	2	45.55	0.0000
Area	1	17.57	0.0000
Hijos*área	2	5.81	0.0549
Edad*hijos	4	11.95	0.0177
Residual	6	2.28	0.8919

Para un nivel de significancia del 15%, de acuerdo a la estadística de Wald (Q_w = 2.28 con 6 gl), el modelo ajusta adecuadamente a los datos.

Observando el p-value asociado a cada componente, todas ellas son significativas a un nivel del 5%.

A partir del modelo planteado, los valores de los parámetros estimados son: (Cuadro Nº 3.11).

CUADRO 3.11: Parámetros estimados por el método de MCP

Efecto		Parámetro	Estimación	Error Estándar
Intercepto		β_0	-1.1964	0.0445
Edad	**De 20-29 años**	β_1	-0.4171	0.0738
	De 30-39 años	β_2	0.1876	0.0461
Número de hijos	**1 ó 2 hijos**	β_3	-0.4477	0.0679
	3 ó 4 hijos	β_4	0.2114	0.0527
Area de residencia	**urbana**	β_5	0.1456	0.0347
Número de hijos por área de residencia	**1 ó 2 hijos y zona urbana**	β_6	-0.1355	0.0596
	3 ó 4 hijos y zona urbana	β_7	0.0444	0.0434
Edad por número de hijos	**De 20-29 años y 1 ó 2 hijos**	β_8	-0.3108	0.1045
	De 20-29 años y 3 ó 4 hijos	β_9	0.0873	0.0858
	De 30-39 años y 1 ó 2 hijos	β_{10}	0.0836	0.0700
	De 30-39 años y 3 ó 4 hijos	β_{11}	-0.0438	0.0542

Como para el proceso de estimación de los parámetros usamos la transformación logaritmo, para una adecuada interpretación de los mismos es necesario reconvertirlo a la escala original. (cuadro Nº 3.12).

CUADRO 3.12: Parámetros estimados por el método de MCP

Efecto		Parámetro	Estimador Log (b)	Antilog (b) b^*
Intercepto		β_0	-1.1964	0.0636
Edad	**De 20-29 años**	β_1	-0.4171	0.3827
	De 30-39 años	β_2	0.1876	1.5403
Número de hijos	**1 ó 2 hijos**	β_3	-0.4477	0.3567
	3 ó 4 hijos	β_4	0.2114	1.6270
Area de residencia	**urbana**	β_5	0.1456	1.3983
Número de hijos por área de residencia	**1 ó 2 hijos y zona urbana**	β_6	-0.1355	0.7319
	3 ó 4 hijos y zona urbana	β_7	0.0444	1.1076
Edad por número de hijos	**De 20-29 años y 1 ó 2 hijos**	β_8	-0.3108	0.4889
	De 20-29 años y 3 ó 4 hijos	β_9	0.0873	1.2226
	De 30-39 años y 1 ó 2 hijos	β_{10}	0.0836	1.2123
	De 30-39 años y 3 ó 4 hijos	β_{11}	-0.0438	0.9041

Sin considerar el efecto de las covariables, la tasa de prevalencia de uso del método de esterilización femenina estimada es de 0.06336. Esto significa que la tasa de prevalencia del uso del método de esterilización femenina se incrementa con un factor multiplicativo de 0.0636.

Respecto a la variable edad, la tasa de prevalencia de uso esterilización femenina se incrementa conjuntamente con la edad; pues mientras que para el grupo de mujeres con edades entre 20-29 años es de 38% se incrementa hasta un 154% para las mujeres con edades comprendidas entre 30-39 años y para el grupo de mujeres de 40 a49 años llega hasta 1.5403

Lo mismo ocurre respecto a la variable número de hijos, pues se incrementa casi en el doble para aquellas que tienen 3 ó 4 hijos (162%) respecto a aquellas que tienen 1 ó 2 hijos (36%).

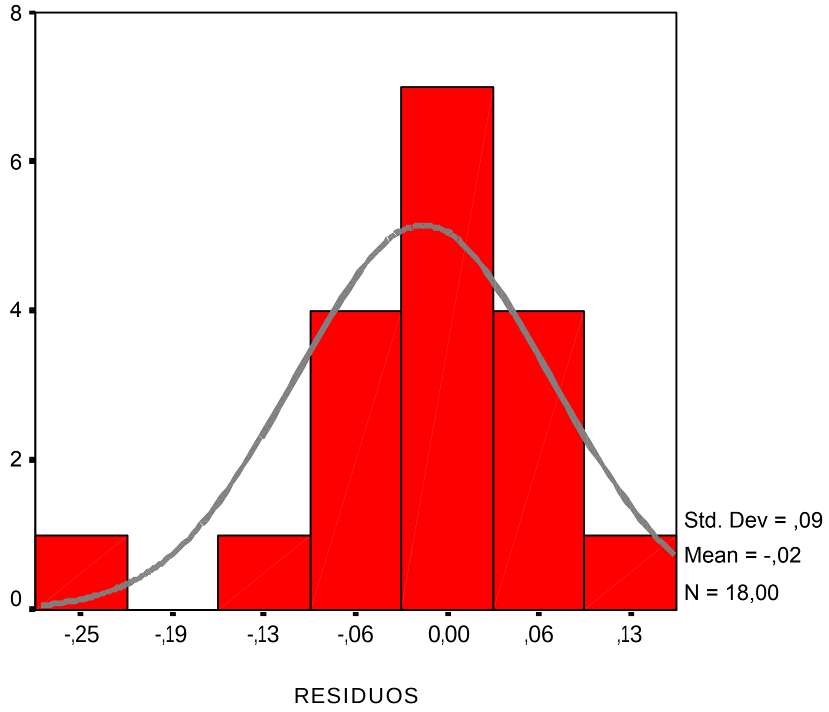
La tasa de prevalencia de uso del método de esterilización femenina estimada, es mayor en la zona urbana que en la zona rural por un efecto multiplicativo en 1.3983.

En el cuadro Nº 3.13 presentamos los residuos conjuntamente con las funciones observadas y estimadas.

CUADRO Nº 3.13: Valores de la función respuesta observada y predecida

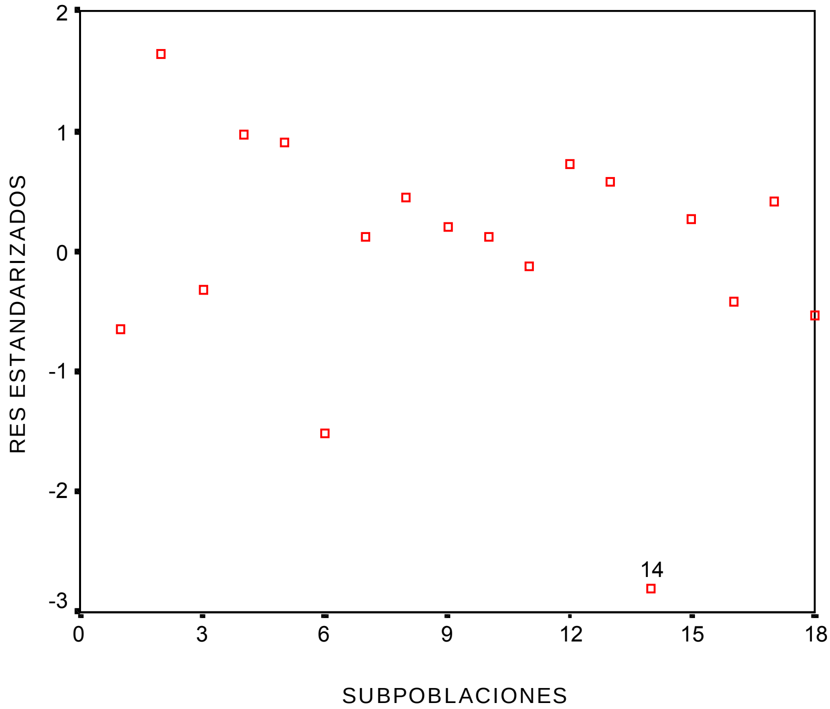
Sub Población	OBSERVADOS Función. Observada	OBSERVADOS Error Estandar (F. observ)	PREDECIDOS Función Predecida	PREDECIDOS Error estandar (F.predecida)	Residuos
1	-2.4341125	0.2182179	-2.361859	0.18444523	-0.0722535
2	-2.2556744	0.28867513	-2.382118	0.20417243	0.12644363
3	-1.1696091	0.13608277	-1.1247704	0.1113646	-0.0448387
4	-1.4375744	0.16666667	-1.5048324	0.11838825	0.06725799
5	-0.8553172	0.28867513	-0.9171432	0.24383109	0.06182596
6	-1.5390761	0.4472136	-1.3906938	0.2499055	-0.1483823
7	-1.368154	0.09759001	-1.3627134	0.09349269	-0.0054406
8	-1.361001	0.19611614	-1.3829725	0.1602893	0.02197149
9	-0.6500441	0.04833684	-0.6511984	0.04658651	0.0011543
10	-1.0371418	0.10910894	-1.0312603	0.08712827	-0.0058815
11	-0.6025867	0.06967331	-0.5756414	0.06366659	-0.0269453
12	-1.0025472	0.09166984	-1.049192	0.07748041	0.04664483
13	-1.1441539	0.12598817	-1.177306	0.12017234	0.03315211
14	-1.4586378	0.35355339	-1.197565	0.19030677	-0.2610728
15	-0.6024242	0.0579284	-0.6088915	0.05556747	0.00646726
16	-1.042488	0.16666667	-0.9889534	0.09704093	-0.0535346
17	-0.6583725	0.06311941	-0.6775311	0.05874984	0.01915864
18	-1.2143558	0.11470785	-1.1510818	0.08572941	-0.063274

Gráfico Nº 1: Histograma de los residuos



En el histograma de los residuos, la media toma un valor muy cercano a cero (-0.02) con un apuntamiento de 2.86 que puede considerarse un valor cercano al de la curva normal, con asimetría a la izquierda (pues el valor del coeficiente de asimetría es -1.284); en cuanto a la dispersión de los datos, la varianza toma el valor 0.007568. En otras palabras, los residuos presentan colas más pesadas de la normal, aunque su media, apuntamiento sean aproximados a la normal.

Gráfico Nº 2: Comportamiento general de los residuos estandarizados



Los residuos estandarizados no presentan ningún patrón de comportamiento. Como puede observarse en el gráfico anterior, la mayoría de los residuos caen en el rango [-2, 2] Sin embargo, el residuo perteneciente a la subpoblación 14 (edad 40-49 años; 0-2 hijos; zona rural), se comporta de manera diferente al conjunto de residuos.

Gráfico Nº 3: Probabilidad Normal de los residuos estandarizados:

En el gráfico de probabilidad normal, se observa claramente que la curva tiene colas más pesadas que la normal.

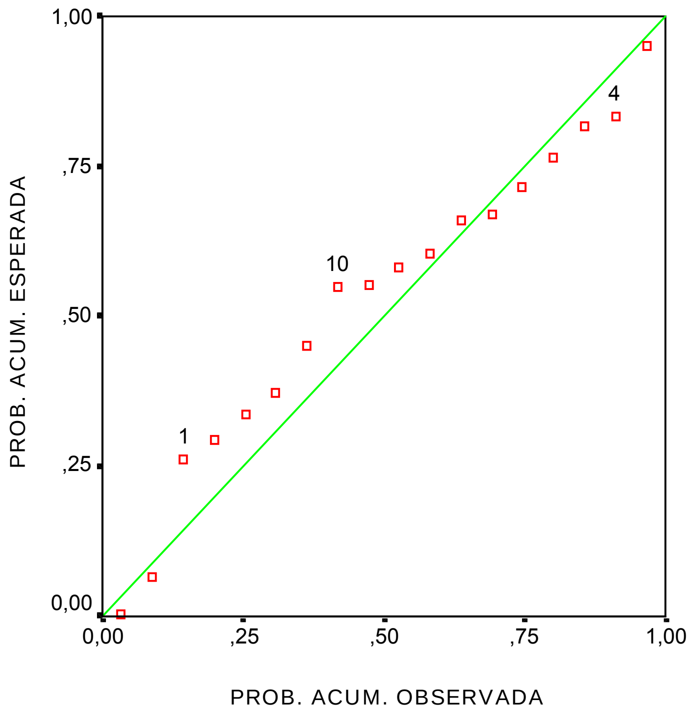
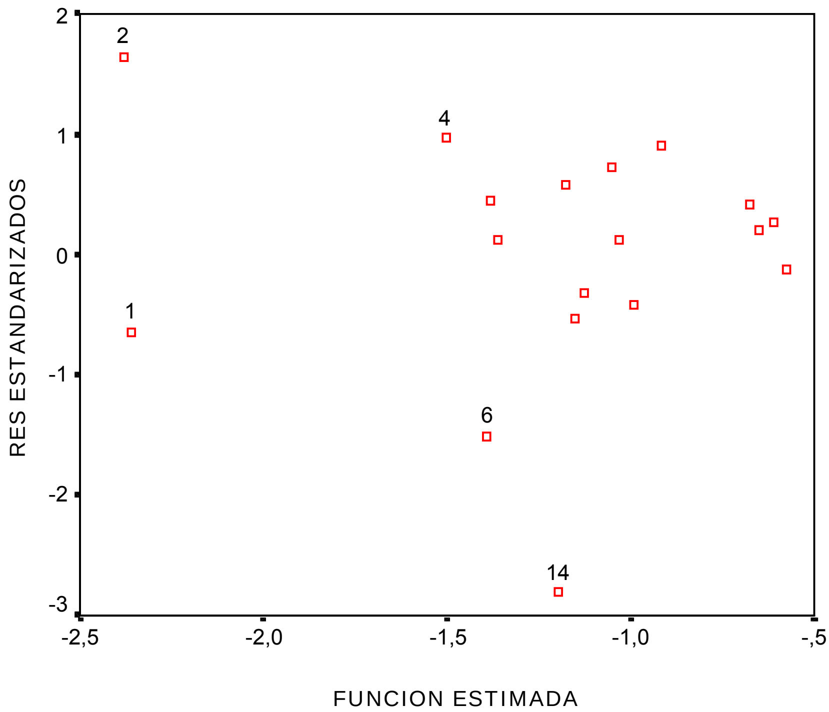


Gráfico Nº 4: de los residuos estandarizados vs Funciones estimadas



En general puede observarse que los residuos tienen un comportamiento homocedásticos, pues en su mayoría se encuentran alrededor de cero, aún cuando los residuos correspondientes a las subpoblaciones 1, 2, 6 Y 14 se alejan de la masa.

Por ello se haría necesaria estudiar estos datos para ver si son discordantes o influyentes.

8.- Prueba de hipótesis.

Algunas hipótesis que vale la pena docimar son:

a) H_0 : Las tasas de prevalencia de uso del método de esterilización femenina es igual tanto para las mujeres que tienen entre 20-29 años como para aquellas con edades entre 30-39 años. Expresado en símbolos es equivalente a:

$$\frac{\lambda_{20-29\text{años}}}{\lambda_{30-39\text{años}}} = 1$$

$$\frac{\lambda_{20-29\text{años}}}{\lambda_{30-39\text{años}}} \neq 1$$

Tomando logaritmo: $\log(\lambda_{20-29 años}) = \log(\lambda_{30-39 años})$
En términos de los parámetros es equivalente a:

H_o: $\beta_1 = \beta_2$
H_1: $\beta_1 \neq \beta_2$

El vector de contrastes es: c = [0 1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0].
La estadistica chi-cuadrada de Wald asociada a esta hipótesis es:

H_0	g.l	Chi-cuadrado	p-value
$\beta_1 = \beta_2$	1	28.83	0.0000

Las.tasas de prevalencia de uso del método de esterilización femenina es diferente entre las mujeres con edades entre 20-29 años y 30 a 39 años ($p<0.05$). Esto coincide con lo representado por los parámetros estimados, pues esta tasa es mayor en el segundo grupo.

b) Las tasas de prevalencia de uso del método de esterilización femenina es la misma para mujeres con 1 ó 2 hijos y aquellas con 3 ó 4 hijos.
Que es equivalente a decir:

$$\frac{\lambda_{1-2 hijos}}{\lambda_{3-4 hijos}} = 1$$

$$\frac{\lambda_{1-2 hijos}}{\lambda_{3-4 hijos}} \neq 1$$

Tomando logaritmo: $\log(\lambda_{1-2 hijos}) = \log(\lambda_{3-4 hijos})$
En términos de los parámetros es equivalente a:

H_o: $\beta_3 = \beta_4$
H_1: $\beta_3 \neq \beta_4$

El vector de contrastes es: c = [0 0 0 1 -1 0 0 0 0 0 0 0].
La estadistica chi-cuadrada de Wald asociada a esta hipótesis es:

H_0	g.l	Chi-cuadrado	p-value
$\beta_1 = \beta_2$	1	42.15	0.0000

Las.tasas de prevalencia de uso del método de esterilización femenina es diferente entre las mujeres con 1 ó 2 hijos y aquellas con 3 ó más hijos.

CAPITULO 4

CONCLUSIONES

1. Los MLG unifican los modelos con variables respuesta continua y categórica, dándonos la posibilidad de analizar variables con distribuciones pertenecientes a la familia exponencial haciendo uso de la teoría desarrollada para el modelo lineal general.

2. En el contexto de los datos categóricos, el método de MCP es considerado como un método variacional, pues el mayor interés se centra en estudiar la variación de los elementos del vector de la función respuesta, relativa a la estructura de las subpoblaciones. En otras palabras, generalmente nuestro interés está relacionado en una comparación de las distribuciones de la respuesta entre las diversas subpoblaciones.

3. La metodología de MCP puede ser usada en condiciones más generales que la metodología de MV, siempre que el tamaño de muestra sea suficientemente grande. Esta metodología tiene la ventaja de ser computacionalmente más simple que aquella basada en MV, siendo más útil cuando se tiene una variable respuesta y varias covariables.

4. Respecto a la metodología de MV, ésta tiene aplicaciones más restringidas (particularmente en los modelos log-lineales desarrollado por Bishop, Fienberg y Holland), pero el tamaño de muestra requerido puede ser relativamente menor que en el caso de MCP.
   Es necesario recordar que el método de MV es más útil cuando la distribución de las variables son conocidas, pues aunque tanto los estimadores como los resultados de las pruebas de hipótesis correspondientes encontrados con este método son asintóticamente equivalentes a los encontrados con el método de MCP, la mayor ventaja del método de MV es que en general las restricciones relativas a los tamaños de muestra para validar estas aproximaciones son menos rigurosas que en el caso de MCP.

APENDICE A

A1: FAMILIA EXPONENCIAL

La familia exponencial tiene importantes propiedades dentro de la teoría estadística. En este caso, nuestro interés se centra en la familia exponencial uniparamétrica, pues nos garantiza la equivalencia entre los métodos de máxima verosimilitud y el método de mínimos cuadrados ponderados, dentro de los MLG, para estimar los parámetros desconocidos del modelo.

Definición

La familia de distribuciones $\{\pi_\theta : \theta \in \Theta\}$ es llamada familia exponencial si existen funciones reales p(θ), q(θ) sobre Θ, y g(.) definida en $\Re^n$ y un conjunto A $\subset$ $\Re^n$ tal que la función de densidad (probabilidad) $\pi(y,\theta)$ de p_θ puede escribirse como,

$$\pi(y,\theta,\phi) = \exp\left[\alpha(\phi)\{y\theta - a(\theta) + b(y)\} + \beta(\phi, y)\right] \quad \text{(A.1)}$$

donde, $\alpha(\phi) > 0$

Cuando ϕ es fijo, tenemos una familia exponencial con parámetro canónico θ. ϕ es un tipo de parámetro de estorbo, como por ejemplo la varianza σ^2 de la distribución normal. Si ϕ es desconocido no hay seguridad que (A.1) sea una familia exponencial.

Propiedades

Sea L la función de verosimilitud de $\pi(y,\theta,\phi)$:

$$L = \log \pi(y,\theta,\phi) = \left[\alpha(\phi)\{y\theta - a(\theta) + b(y)\} + \beta(\phi, y)\right] \quad \text{(A.2)}$$

Para obtener la esperanza y varianza de la variable respuesta y, requerimos expresiones de las derivadas de primer y segundo orden de la función de verosimilitud en términos de la media y varianza de y, y del factor escala $\alpha(\phi)$. Usaremos las derivadas de primer y segundo orden de L:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \alpha(\phi)\{y - a'(\theta)\} \tag{A.3}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial^2(\theta)} = -\alpha(\phi)\{a''(\theta)\} \tag{A.4}$$

Las expresiones (A.3) y (A.4), son llamadas función score y función información respectivamente.

Usando los resultados:

$$\mathbf{E}\left[\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial(\boldsymbol{\theta})}\right] = 0 \tag{A.5}$$

$$\mathbf{E}\left[\frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial^2(\boldsymbol{\theta})}\right] = -\mathbf{E}\left[\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial(\boldsymbol{\theta})}\right] = 0 \tag{A.6}$$

Podemos derivar fácilmente la esperanza y la varianza de y.
Reemplazando (A.5) en (A.3):

$$E[\alpha(\phi)\{y - a'(\theta)\}] = 0$$

Obteniendo la **Esperanza de y,**

$$E(y) = \mu = a'(\theta) \tag{A.7}$$

Con este resultado, podemos escribir (A.3) como:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \alpha(\phi)\{y - \mu\} \tag{A.8}$$

De (A.6) obtenemos que,

$$E[-\alpha(\phi)a''(\theta)] = -E[\alpha(\phi)\{y - \mu\}]^2$$

Luego,

$$a''(\theta) = \alpha(\phi) E\{y - \mu\}^2$$

$$a''(\theta) = \alpha(\phi) Var(y) = V \qquad (A.9)$$

Cuando el factor escala $\alpha(\phi) = 1$, V es la varianza de θ,

$$Var(y) = a''(\theta)$$

Notamos también que,

$$V = \frac{d\mu}{d\theta} \qquad (A.10)$$

Para una familia exponencial de un parámetro, con $\alpha(\phi) = 1$, podemos escribir

$$\pi(y, \theta) = \exp\{y\theta - a(\theta) + b(z)\}$$

Así que,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = z - \mu \qquad (A.11)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial^2 \theta} = var(z) \qquad (A.12)$$

Funciones Enlace:

Cada una de las distribuciones que pertenecen a la familia exponencial dan lugar a una función de enlace específica la cual se deriva partiendo de la ecuación: $\eta = g(\mu)$

$g(\mu)$ debe ser una función estrictamente monótona (para que exista $(x'x)^{-1}$) y dos veces diferenciable. Despejando μ obtenemos:

$$\mu = g^{-1}(\eta)$$

De (A.7),

$$\mu = a'(\theta)$$

$$a'(\theta) = g^{-1}(\eta)$$

Luego:

$$\theta = (a')^{-1} \{g^{-1}(\eta)\}$$

Entonces:

$\theta = h(\eta) = h(X\beta)$; donde $h(\eta) = (a')^{-1}\{g^{-1}(\eta)\}$

A continuación describimos las funciones log-verosímiles de las distribuciones Binomial, normal y Poisson bajo la familia exponencial con sus respectivas medias, varianzas y funciones enlace.

Distribución Binomial.-

Y ~ Binomial (n,p) con función logverosímil l

$$\mathbf{l} = \left[\mathbf{y}\,\mathbf{ln(p)} + \mathbf{(n-y)ln(1-p)} + \mathbf{ln}\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{y}}\right] \qquad 0<p<1$$

Como μ = E(y) = np, $\Rightarrow$ p = u/n, reemplazando en la función de verosimilitud:

$$\mathbf{l} = \left\{ \mathbf{y} \ln \frac{\mu}{\mathbf{n} - \mu} + \mathbf{n} \ln(\mathbf{n} - \mu) - \mathbf{n} \ln(\mathbf{n}) \right\}$$

Obteniendo:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{ln} \frac{\mu}{\mathbf{n} - \mu} \qquad a(\theta) = -n \ln(n - \mu) \qquad b(y) = -n \ln(n)$$

Entonces, **la función de enlace canónico (**$\theta = \eta$) es:

$$\eta = \mathbf{ln} \left[\frac{\mu}{\mathbf{n} - \mu} \right]$$

La **Esperanza** y **Varianza** de y:

$$E(Y) = \mu$$

$$\mathrm{Var}(y) = [p'(\theta)]^{-1} = \frac{\mu(n - \mu)}{n}$$

Distribución Poisson:

Y $\sim$ Poisson (θ) con función de logverosimilitud:

$$l = \{ y \ln(\theta) - \theta + \ln(1/y) \}$$

Como E(y) = μ=θ, μ > o

$$l = \{y \ln(\mu) - \mu + \ln(1/y)$$

Obteniendo:

$\theta = \ln(\mu)$; $a(\theta) =$; $b(y) = \ln(1/y)$

Entonces, La **Función de enlace** es:

$\eta = \ln(\mu)$.

La **esperanza** y **varianza** de y:

$$E(y) = \mu$$

$$Var(y) = \mu.$$

Distribución Normal:

$Y \sim N(\mu,\sigma_o^2)$ con σ_o^2 conocido; la funcion de logverosimilitud es:

$$l = \{\sigma_o^{-2}(\theta y - \theta^2/2 + y^2/2)\}$$

Como $E(y) = \mu = \theta$ y además asumiendo que $\sigma_o^2 = 1$

$$l = (\mu y - \mu^2/2 + y^2/2)$$

Entonces: La **Función enlace** es:

$\eta = \mu$

La **Esperanza** y **varianza:**

$$E(y) = \mu$$

$$Var(y) = 1$$

Como podemos observar, la función de enlace canónico de una distribución normal es la identidad (pues $\eta=\mu$) por lo cual η y μ pueden tomar cualquier valor en la recta real.

En el caso de trabajar con conteos, como por ejemplo utlilizando una distribución Poisson, debemos tener un $\mu > 0$, razón por la cual no es apropiado usar un enlace identidad pues η estaría tomando valores negativos.

A2: MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS

Como V es una matriz no singular y definida positiva, existe una matriz K, simétrica y no singular tal que:

$$\mathbf{K'K = KK = V} \qquad \text{(A.13)}$$

Utilizando la ecuación (B.1), podemos expresar el modelo $Y=X\beta+\varepsilon$ como :

$$\mathbf{Z = B\beta + g} \qquad \text{(A.14)}$$

Donde, $Z=K^{-1}Y$, $\mathbf{B}=K^{-1}X$, $\mathbf{g}=K^{-1}\varepsilon$

De modo que,

$$E(\mathbf{g}) = \mathbf{K^{-1}} E(\varepsilon) = 0$$
$$V(\mathbf{g})=V(K^{-1}\varepsilon)=E[(K^{-1}\varepsilon)'(\mathbf{K^{-1}}\varepsilon)]=\sigma^2 I \qquad \text{(A.15)}$$

Luego, para estimar el vector de parámetros del modelo (A.14) minimizamos:,

$$\underset{\beta\in\Re^p}{\mathrm{Min}}\ \mathbf{S(\beta) = g'g = \varepsilon' V\, \varepsilon =}(Y-X\beta)'\mathbf{V^{-1}}(Y-X\beta) \qquad \textbf{(A.16)}$$

La función objetivo **S(β)**, es una función continua y derivable, por lo que se obtiene fácilmente los estimadores del vector **β.**

A2: MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS

Como V es una matriz no singular y definida positiva, existe una matriz K, simétrica y no singular tal que:

$$\mathbf{K'K = KK = V} \qquad \text{(A.13)}$$

Utilizando la ecuación (B.1), podemos expresar el modelo $Y=X\beta+\varepsilon$ como
:

$$\mathbf{Z = B\beta + g} \qquad \text{(A.14)}$$

Donde, $Z=K^{-1}Y$, $\mathbf{B}=K^{-1}X$, $\mathbf{g}=K^{-1}\,\varepsilon$

De modo que,

$$E(\mathbf{g}) = \mathbf{K^{-1}}\, E(\varepsilon) = 0$$

$$V(\mathbf{g})=V(K^{-1}\varepsilon)=E[(K^{-1}\varepsilon)'(\mathbf{K}^{-1}\varepsilon)]=\sigma^2\mathbf{I} \qquad \text{(A.15)}$$

Luego, para estimar el vector de parámetros del modelo (A.14) minimizamos:,

$$\underset{\beta\in\Re^p}{\mathrm{Min}}\ \mathbf{S(\beta) = g'g = \varepsilon' V\, \varepsilon = (}\, Y-X\beta)'\mathbf{V^{-1}}(Y-X\beta) \qquad \textbf{(A.16)}$$

La función objetivo **S(β)**, es una función continua y derivable, por lo que se obtiene fácilmente los estimadores del vector **β.**

APENDICE B

TABLA B.1

TABLA DE FRECUENCIAS PARA LA VARIABLE RESPUESTA "DESEO DE TENER MÁS HIJOS"

	Subpoblaciones						Deseo de tener más hijos		
	HIJOS	**EDUC**	**EDAD (años)**	**ECON**	**AREA**	**OCUP**	**No desea**	**desea**	n_{i+}
1	1a2	ninguno	21a35	unida	rural	no trabaja	25	11	**36**
2	1a2	ninguno	21a35	unida	rural	trabaja	42	11	**53**
3	1a2	primaria	21a35	unida	rural	no trabaja	170	125	**295**
4	1a2	primaria	21a35	unida	rural	trabaja	233	157	**390**
5	1a2	primaria	21a35	unida	urbano	no trabaja	169	121	**290**
6	1a2	primaria	21a35	unida	urbano	trabaja	134	103	**237**
7	1a2	primaria	21a35	nounida	rural	no trabaja	48	7	**55**
8	1a2	primaria	21a35	nounida	rural	trabaja	85	18	**103**
9	1a2	primaria	21a35	nounida	urbano	no trabaja	43	17	**60**
10	1a2	primaria	21a35	nounida	urbano	trabaja	38	11	**49**
11	1a2	primaria	36a45	unida	rural	no trabaja	15	6	**21**
12	1a2	primaria	36a45	unida	rural	trabaja	28	13	**41**
13	1a2	primaria	36a45	unida	urbano	no trabaja	41	13	**54**
14	1a2	primaria	36a45	unida	urbano	trabaja	54	21	**75**
15	1a2	primaria	36a45	nounida	rural	trabaja	32	3	**35**
16	1a2	primaria	36a45	nounida	urbano	no trabaja	19	5	**24**
17	1a2	primaria	36a45	nounida	urbano	trabaja	20	3	**23**
18	1a2	secund	21a35	unida	rural	no trabaja	101	100	**201**
19	1a2	secund	21a35	unida	rural	trabaja	137	110	**247**
20	1a2	secund	21a35	unida	urbano	no trabaja	448	433	**881**
21	1a2	secund	21a35	unida	urbano	trabaja	378	428	**806**
22	1a2	secund	21a35	nounida	rural	no trabaja	21	17	**38**
23	1a2	secund	21a35	nounida	rural	trabaja	38	20	**58**
24	1a2	secund	21a35	nounida	urbano	no trabaja	92	61	**153**
25	1a2	secund	21a35	nounida	urbano	trabaja	114	91	**205**
26	1a2	secund	36a45	unida	urbano	no trabaja	78	25	**103**
27	1a2	secund	36a45	unida	urbano	trabaja	101	36	**137**
28	1a2	secund	36a45	nounida	urbano	no trabaja	27	9	**36**
29	1a2	secund	36a45	nounida	urbano	trabaja	41	15	**56**
30	1a2	superior	21a35	unida	rural	no trabaja	17	17	**34**
31	1a2	superior	21a35	unida	rural	trabaja	46	57	**103**
32	1a2	superior	21a35	unida	urbano	no trabaja	132	216	**348**
33	1a2	superior	21a35	unida	urbano	trabaja	298	458	**756**
34	1a2	superior	21a35	nounida	urbano	no trabaja	24	23	**47**
35	1a2	superior	21a35	nounida	urbano	trabaja	76	97	**173**
36	1a2	superior	36a45	unida	rural	trabaja	13	9	**22**
37	1a2	superior	36a45	unida	urbano	no trabaja	45	23	**68**
38	1a2	superior	36a45	unida	urbano	trabaja	170	76	**246**
39	1a2	superior	36a45	nounida	urbano	trabaja	48	25	**73**
40	3a4	ninguno	21a35	unida	rural	no trabaja	76	6	**82**

(Continuación)

	Subpoblaciones						Deseo de tener más hijos		n_{i+}
	HIJOS	EDUC	EDAD (años)	ECON	AREA	OCUP	No desea	desea	
41	3a4	ninguno	21a35	unida	rural	trabaja	96	16	**112**
42	3a4	ninguno	21a35	unida	urbano	no trabaja	23	5	**28**
43	3a4	ninguno	36a45	unida	rural	no trabaja	22	5	**27**
44	3a4	ninguno	36a45	unida	rural	trabaja	50	2	**52**
45	3a4	ninguno	36a45	unida	urbano	trabaja	19	1	**20**
46	3a4	ninguno	36a45	nounida	rural	trabaja	25	0.5	**25.5**
47	3a4	primaria	21a35	unida	rural	no trabaja	321	62	**383**
48	3a4	primaria	21a35	unida	rural	trabaja	444	63	**507**
49	3a4	primaria	21a35	unida	urbano	no trabaja	248	31	**279**
50	3a4	primaria	21a35	unida	urbano	trabaja	206	23	**229**
51	3a4	primaria	21a35	nounida	rural	trabaja	48	2	**50**
52	3a4	primaria	21a35	nounida	urbano	no trabaja	24	2	**26**
53	3a4	primaria	21a35	nounida	urbano	trabaja	28	1	**29**
54	3a4	primaria	36a45	unida	rural	no trabaja	61	6	**67**
55	3a4	primaria	36a45	unida	rural	trabaja	148	13	**161**
56	3a4	primaria	36a45	unida	urbano	no trabaja	118	10	**128**
57	3a4	primaria	36a45	unida	urbano	trabaja	165	15	**180**
58	3a4	primaria	36a45	nounida	rural	trabaja	32	2	**34**
59	3a4	primaria	36a45	nounida	urbano	no trabaja	19	1	**20**
60	3a4	primaria	36a45	nounida	urbano	trabaja	38	2	**40**
61	3a4	secund	21a35	unida	rural	no trabaja	87	22	**109**
62	3a4	secund	21a35	unida	rural	trabaja	125	24	**149**
63	3a4	secund	21a35	unida	urbano	no trabaja	352	57	**409**
64	3a4	secund	21a35	unida	urbano	trabaja	308	57	**365**
65	3a4	secund	21a35	nounida	urbano	no trabaja	25	1	**26**
66	3a4	secund	21a35	nounida	urbano	trabaja	29	4	**33**
67	3a4	secund	36a45	unida	rural	no trabaja	21	2	**23**
68	3a4	secund	36a45	unida	rural	trabaja	30	2	**32**
69	3a4	secund	36a45	unida	urbano	no trabaja	139	18	**157**
70	3a4	secund	36a45	unida	urbano	trabaja	213	23	**236**
71	3a4	secund	36a45	nounida	urbano	no trabaja	19	4	**23**
72	3a4	secund	36a45	nounida	urbano	trabaja	36	7	**43**
73	3a4	superior	21a35	unida	rural	trabaja	22	2	**24**
74	3a4	superior	21a35	unida	urbano	no trabaja	42	6	**48**
75	3a4	superior	21a35	unida	urbano	trabaja	99	24	**123**
76	3a4	superior	36a45	unida	urbano	no trabaja	37	5	**42**
77	3a4	superior	36a45	unida	urbano	trabaja	121	17	**138**
78	3a4	superior	36a45	nounida	urbano	trabaja	25	4	**29**
79	5más	ninguno	21a35	unida	rural	no trabaja	40	3	**43**
80	5más	ninguno	21a35	unida	rural	trabaja	88	4	**92**
81	5más	ninguno	36a45	unida	rural	no trabaja	143	7	**150**
82	5más	ninguno	36a45	unida	rural	trabaja	245	5	**250**
83	5más	ninguno	36a45	unida	urbano	no trabaja	47	2	**49**
84	5más	ninguno	36a45	unida	urbano	trabaja	61	2	**63**
85	5más	ninguno	36a45	nounida	rural	trabaja	40	0.5	**40.5**
86	5más	primaria	21a35	unida	rural	no trabaja	170	6	**176**
87	5más	primaria	21a35	unida	rural	trabaja	323	17	**340**
88	5más	primaria	21a35	unida	urbano	no trabaja	99	4	**103**

(Continuación)									
	Subpoblaciones						**Deseo de tener más hijos**		
	HIJOS	**EDUC**	**EDAD (años)**	**ECON**	**AREA**	**OCUP**	**No desea**	**desea**	n_{i+}
89	5más	primaria	21a35	unida	urbano	trabaja	84	1	**85**
90	5más	primaria	21a35	nounida	rural	trabaja	21	0.5	**21.5**
91	5más	primaria	36a45	unida	rural	no trabaja	236	12	**248**
92	5más	primaria	36a45	unida	rural	trabaja	369	9	**378**
93	5más	primaria	36a45	unida	urbano	no trabaja	201	8	**209**
94	5más	primaria	36a45	unida	urbano	trabaja	206	6	**212**
95	5más	primaria	36a45	nounida	rural	trabaja	37	0.5	**37.5**
96	5más	primaria	36a45	nounida	urbano	no trabaja	20	1	**21**
97	5más	primaria	36a45	nounida	urbano	trabaja	45	0.5	**45.5**
98	5más	secund	21a35	unida	rural	trabaja	20	1	**21**
99	5más	secund	21a35	unida	urbano	no trabaja	50	1	**51**
100	5más	secund	21a35	unida	urbano	trabaja	51	2	**53**
101	5más	secund	36a45	unida	rural	trabaja	36	2	**38**
102	5más	secund	36a45	unida	urbano	no trabaja	91	2	**93**
103	5más	secund	36a45	unida	urbano	trabaja	78	3	**81**
104	5más	secund	36a45	nounida	urbano	trabaja	23	0.5	**23.5**
105	5más	superior	36a45	unida	urbano	trabaja	30	0.5	**30.5**

I=105, J=2, n=14076.

TABLA B.2

TABLA DE CONTINGENCIA CONSIDERANDO TRES CATEGORÍAS PARA LA VARIABLE NIVEL DE EDUCACIÓN

	Subpoblaciones						Deseo de tener más hijos		
	HIJOS	EDUC	EDAD (años)	ECON	OCUP	AREA	No desea	desea	n_{i+}
1	1a2	primaria	21a35	unida	no trabaja	Rural	195	136	**331**
2	1a2	primaria	21a35	unida	no trabaja	Urbano	169	121	**290**
3	1a2	primaria	21a35	unida	trabaja	rural	275	168	**443**
4	1a2	primaria	21a35	unida	trabaja	urbano	134	103	**237**
5	1a2	primaria	21a35	nounida	no trabaja	rural	48	7	**55**
6	1a2	primaria	21a35	nounida	no trabaja	urbano	43	17	**60**
7	1a2	primaria	21a35	nounida	trabaja	rural	85	18	**103**
8	1a2	primaria	21a35	nounida	trabaja	urbano	38	11	**49**
9	1a2	primaria	36a45	unida	no trabaja	rural	15	6	**21**
10	1a2	primaria	36a45	unida	no trabaja	urbano	41	13	**54**
11	1a2	primaria	36a45	unida	trabaja	rural	28	13	**41**
12	1a2	primaria	36a45	unida	trabaja	urbano	54	21	**75**
13	1a2	primaria	36a45	nounida	no trabaja	urbano	19	5	**24**
14	1a2	primaria	36a45	nounida	trabaja	rural	32	3	**35**
15	1a2	primaria	36a45	nounida	trabaja	urbano	20	3	**23**
16	1a2	secund	21a35	unida	no trabaja	rural	101	100	**201**
17	1a2	secund	21a35	unida	no trabaja	urbano	448	433	**881**
18	1a2	secund	21a35	unida	trabaja	rural	137	110	**247**
19	1a2	secund	21a35	unida	trabaja	urbano	378	428	**806**
20	1a2	secund	21a35	nounida	no trabaja	rural	21	17	**38**
21	1a2	secund	21a35	nounida	no trabaja	urbano	92	61	**153**
22	1a2	secund	21a35	nounida	trabaja	rural	38	20	**58**
23	1a2	secund	21a35	nounida	trabaja	urbano	114	91	**205**
24	1a2	secund	36a45	unida	no trabaja	urbano	78	25	**103**
25	1a2	secund	36a45	unida	trabaja	urbano	101	36	**137**
26	1a2	secund	36a45	nounida	no trabaja	urbano	27	9	**36**
27	1a2	secund	36a45	nounida	trabaja	urbano	41	15	**56**
28	1a2	superior	21a35	unida	no trabaja	rural	17	17	**34**
29	1a2	superior	21a35	unida	no trabaja	urbano	132	216	**348**
30	1a2	superior	21a35	unida	trabaja	rural	46	57	**103**
31	1a2	superior	21a35	unida	trabaja	urbano	298	458	**756**
32	1a2	superior	21a35	nounida	no trabaja	urbano	24	23	**47**
33	1a2	superior	21a35	nounida	trabaja	urbano	76	97	**173**
34	1a2	superior	36a45	unida	no trabaja	urbano	45	23	**68**
35	1a2	Superior	36a45	unida	trabaja	rural	13	9	**22**
36	1a2	Superior	36a45	unida	trabaja	urbano	170	76	**246**
37	1a2	Superior	36a45	nounida	trabaja	urbano	48	25	**73**
38	3a4	Primaria	21a35	unida	no trabaja	rural	397	68	**465**
39	3a4	Primaria	21a35	unida	no trabaja	urbano	271	36	**307**
40	3a4	Primaria	21a35	unida	trabaja	rural	540	79	**619**
41	3a4	Primaria	21a35	unida	trabaja	urbano	206	23	**229**
42	3a4	Primaria	21a35	nounida	no trabaja	urbano	24	2	**26**
43	3a4	Primaria	21a35	nounida	trabaja	rural	48	2	**50**

Continuación

Subpoblaciones							Deseo de tener más hijos		
	HIJOS	**EDUC**	**EDAD (años)**	**ECON**	**OCUP**	**AREA**	**No desea**	**desea**	n_{i+}
44	3a4	Primaria	21a35	nounida	trabaja	urbano	28	1	**29**
45	3a4	Primaria	36a45	unida	no trabaja	rural	83	11	**94**
46	3a4	Primaria	36a45	unida	no trabaja	urbano	118	10	**128**
47	3a4	Primaria	36a45	unida	trabaja	rural	198	15	**213**
48	3a4	Primaria	36a45	unida	trabaja	urbano	184	16	**200**
49	3a4	Primaria	36a45	nounida	no trabaja	urbano	19	1	**20**
50	3a4	primaria	36a45	nounida	trabaja	rural	57	2	**59**
51	3a4	Primaria	36a45	nounida	trabaja	urbano	38	2	**40**
52	3a4	secund	21a35	unida	no trabaja	rural	87	22	**109**
53	3a4	secund	21a35	unida	no trabaja	urbano	352	57	**409**
54	3a4	secund	21a35	unida	trabaja	rural	125	24	**149**
55	3a4	secund	21a35	unida	trabaja	urbano	308	57	**365**
56	3a4	secund	21a35	nounida	no trabaja	urbano	25	1	**26**
57	3a4	secund	21a35	nounida	trabaja	urbano	29	4	**33**
58	3a4	secund	36a45	unida	no trabaja	rural	21	2	**23**
59	3a4	secund	36a45	unida	no trabaja	urbano	139	18	**157**
60	3a4	secund	36a45	unida	trabaja	rural	30	2	**32**
61	3a4	secund	36a45	unida	trabaja	urbano	213	23	**236**
62	3a4	secund	36a45	nounida	no trabaja	urbano	19	4	**23**
63	3a4	secund	36a45	nounida	trabaja	urbano	36	7	**43**
64	3a4	Superior	21a35	unida	no trabaja	urbano	42	6	**48**
65	3a4	Superior	21a35	unida	trabaja	rural	22	2	**24**
66	3a4	Superior	21a35	unida	trabaja	urbano	99	24	**123**
67	3a4	Superior	36a45	unida	no trabaja	urbano	37	5	**42**
68	3a4	superior	36a45	unida	trabaja	urbano	121	17	**138**
69	3a4	superior	36a45	nounida	trabaja	urbano	25	4	**29**
70	5más	primaria	21a35	unida	no trabaja	rural	210	9	**219**
71	5más	primaria	21a35	unida	no trabaja	urbano	99	4	**103**
72	5más	primaria	21a35	unida	trabaja	rural	411	21	**432**
73	5más	Primaria	21a35	unida	trabaja	urbano	84	1	**85**
74	5más	Primaria	21a35	nounida	trabaja	rural	21	0.5	**21.5**
75	5más	Primaria	36a45	unida	no trabaja	rural	379	19	**398**
76	5más	Primaria	36a45	unida	no trabaja	urbano	248	10	**258**
77	5más	Primaria	36a45	unida	trabaja	rural	614	14	**628**
78	5más	Primaria	36a45	unida	trabaja	urbano	267	8	**275**
79	5más	primaria	36a45	nounida	no trabaja	urbano	20	1	**21**
80	5más	primaria	36a45	nounida	trabaja	rural	77	0.5	**77.5**
81	5más	primaria	36a45	nounida	trabaja	urbano	45	0.5	**45.5**
82	5más	secund	21a35	unida	no trabaja	urbano	50	1	**51**
83	5más	secund	21a35	unida	trabaja	rural	20	1	**21**
84	5más	secund	21a35	unida	trabaja	urbano	51	2	**53**
85	5más	secund	36a45	unida	no trabaja	urbano	91	2	**93**
86	5más	secund	36a45	unida	trabaja	rural	36	2	**38**
87	5más	secund	36a45	unida	trabaja	urbano	78	3	**81**
88	5más	secund	36a45	nounida	trabaja	urbano	23	0.5	**23.5**
89	5más	superior	36a45	unida	trabaja	urbano	30	0.5	**30.5**

I=89, J=2, N=14075.

TABLA B.3

TABLA DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES

Subpoblaciones							Deseo de tener más hijos	
	HIJOS	EDUC	EDAD	ECON	OCUP	AREA	No desea	Desea
1	1a2	primaria	21a35	unida	no trabaja	rural	π_{11}	π_{12}
2	1a2	primaria	21a35	unida	no trabaja	urbano	π_{21}	π_{22}
3	1a2	primaria	21a35	unida	trabaja	rural	π_{31}	π_{32}
4	1a2	primaria	21a35	unida	trabaja	urbano	π_{41}	π_{42}
5	1a2	primaria	21a35	nounida	no trabaja	rural	π_{51}	π_{52}
6	1a2	primaria	21a35	nounida	no trabaja	urbano	π_{61}	π_{62}
7	1a2	primaria	21a35	nounida	trabaja	rural	π_{71}	π_{72}
8	1a2	primaria	21a35	nounida	trabaja	urbano	π_{81}	π_{82}
9	1a2	primaria	36a45	unida	no trabaja	rural	π_{91}	π_{92}
10	1a2	primaria	36a45	unida	no trabaja	urbano	$\pi_{10\,1}$	$\pi_{10\,2}$
11	1a2	primaria	36a45	unida	trabaja	rural	$\pi_{11\,1}$	$\pi_{11\,2}$
12	1a2	primaria	36a45	unida	trabaja	urbano	$\pi_{12\,1}$	$\pi_{12\,2}$
13	1a2	primaria	36a45	nounida	no trabaja	urbano	$\pi_{13\,1}$	$\pi_{13\,2}$
14	1a2	primaria	36a45	nounida	trabaja	rural	$\pi_{14\,1}$	$\pi_{14\,2}$
15	1a2	primaria	36a45	nounida	trabaja	urbano	$\pi_{15\,1}$	$\pi_{15\,2}$
16	1a2	secund	21a35	unida	no trabaja	rural	$\pi_{16\,1}$	$\pi_{16\,2}$
17	1a2	secund	21a35	unida	no trabaja	urbano	$\pi_{17\,1}$	$\pi_{17\,2}$
18	1a2	secund	21a35	unida	trabaja	rural	$\pi_{18\,1}$	$\pi_{18\,2}$
19	1a2	secund	21a35	unida	trabaja	urbano	$\pi_{19\,1}$	$\pi_{19\,2}$
20	1a2	secund	21a35	nounida	no trabaja	rural	$\pi_{20\,1}$	$\pi_{20\,2}$
21	1a2	secund	21a35	nounida	no trabaja	urbano	$\pi_{21\,1}$	$\pi_{21\,2}$
22	1a2	secund	21a35	nounida	trabaja	rural	$\pi_{22\,1}$	$\pi_{22\,2}$
23	1a2	secund	21a35	nounida	trabaja	urbano	$\pi_{23\,1}$	$\pi_{23\,2}$
24	1a2	secund	36a45	unida	no trabaja	urbano	$\pi_{24\,1}$	$\pi_{24\,2}$
25	1a2	secund	36a45	unida	trabaja	urbano	$\pi_{25\,1}$	$\pi_{25\,2}$
26	1a2	secund	36a45	nounida	no trabaja	urbano	$\pi_{26\,1}$	$\pi_{26\,2}$
27	1a2	secund	36a45	nounida	trabaja	urbano	$\pi_{27\,1}$	$\pi_{27\,2}$
28	1a2	superior	21a35	unida	no trabaja	rural	$\pi_{28\,1}$	$\pi_{28\,2}$
29	1a2	superior	21a35	unida	no trabaja	urbano	$\pi_{29\,1}$	$\pi_{29\,2}$
30	1a2	superior	21a35	unida	trabaja	rural	$\pi_{30\,1}$	$\pi_{30\,2}$
31	1a2	superior	21a35	unida	trabaja	urbano	$\pi_{31\,1}$	$\pi_{31\,2}$
32	1a2	superior	21a35	nounida	no trabaja	urbano	$\pi_{32\,1}$	$\pi_{32\,2}$
33	1a2	superior	21a35	nounida	trabaja	urbano	$\pi_{33\,1}$	$\pi_{33\,2}$
34	1a2	superior	36a45	unida	no trabaja	urbano	$\pi_{34\,1}$	$\pi_{34\,2}$
35	1a2	Superior	36a45	unida	trabaja	rural	$\pi_{35\,1}$	$\pi_{35\,2}$
36	1a2	Superior	36a45	unida	trabaja	urbano	$\pi_{36\,1}$	$\pi_{36\,2}$
37	1a2	Superior	36a45	nounida	trabaja	urbano	$\pi_{37\,1}$	$\pi_{37\,2}$
38	3a4	primaria	21a35	unida	no trabaja	rural	$\pi_{38\,1}$	$\pi_{38\,2}$
39	3a4	primaria	21a35	unida	no trabaja	urbano	$\pi_{39\,1}$	$\pi_{39\,2}$
40	3a4	primaria	21a35	unida	trabaja	rural	$\pi_{40\,1}$	$\pi_{40\,2}$
41	3a4	primaria	21a35	unida	trabaja	urbano	$\pi_{41\,1}$	$\pi_{41\,2}$
42	3a4	primaria	21a35	nounida	no trabaja	urbano	$\pi_{42\,1}$	$\pi_{42\,2}$
43	3a4	primaria	21a35	nounida	trabaja	rural	$\pi_{43\,1}$	$\pi_{43\,2}$
44	3a4	primaria	21a35	nounida	trabaja	urbano	$\pi_{44\,1}$	$\pi_{44\,2}$
45	3a4	primaria	36a45	unida	no trabaja	rural	$\pi_{45\,1}$	$\pi_{45\,2}$

Subpoblaciones							Deseo de tener más hijos	
	HIJOS	**EDUC**	**EDAD**	**ECON**	**OCUP**	**AREA**	**No desea**	**Desea**
46	3a4	primaria	36a45	unida	no trabaja	urbano	$\pi_{46\,1}$	$\pi_{46\,2}$
47	3a4	primaria	36a45	unida	trabaja	rural	$\pi_{47\,1}$	$\pi_{47\,2}$
48	3a4	primaria	36a45	unida	trabaja	urbano	$\pi_{48\,1}$	$\pi_{48\,2}$
49	3a4	primaria	36a45	nounida	no trabaja	urbano	$\pi_{49\,1}$	$\pi_{49\,2}$
50	3a4	primaria	36a45	nounida	trabaja	rural	$\pi_{50\,1}$	$\pi_{50\,2}$
51	3a4	primaria	36a45	nounida	trabaja	urbano	$\pi_{51\,1}$	$\pi_{51\,2}$
52	3a4	secund	21a35	unida	no trabaja	rural	$\pi_{52\,1}$	$\pi_{52\,2}$
53	3a4	secund	21a35	unida	no trabaja	urbano	$\pi_{53\,1}$	$\pi_{53\,2}$
54	3a4	secund	21a35	unida	trabaja	rural	$\pi_{54\,1}$	$\pi_{54\,2}$
55	3a4	secund	21a35	unida	trabaja	urbano	$\pi_{55\,1}$	$\pi_{55\,2}$
56	3a4	secund	21a35	nounida	no trabaja	urbano	$\pi_{56\,1}$	$\pi_{56\,2}$
57	3a4	secund	21a35	nounida	trabaja	urbano	$\pi_{57\,1}$	$\pi_{57\,2}$
58	3a4	secund	36a45	unida	no trabaja	rural	$\pi_{58\,1}$	$\pi_{58\,2}$
59	3a4	secund	36a45	unida	no trabaja	urbano	$\pi_{59\,1}$	$\pi_{59\,2}$
60	3a4	secund	36a45	unida	trabaja	rural	$\pi_{60\,1}$	$\pi_{60\,2}$
61	3a4	secund	36a45	unida	trabaja	urbano	$\pi_{61\,1}$	$\pi_{61\,2}$
62	3a4	secund	36a45	nounida	no trabaja	urbano	$\pi_{62\,1}$	$\pi_{62\,2}$
63	3a4	secund	36a45	nounida	trabaja	urbano	$\pi_{63\,1}$	$\pi_{63\,2}$
64	3a4	superior	21a35	unida	no trabaja	urbano	$\pi_{64\,1}$	$\pi_{64\,2}$
65	3a4	superior	21a35	unida	trabaja	rural	$\pi_{65\,1}$	$\pi_{65\,2}$
66	3a4	superior	21a35	unida	trabaja	urbano	$\pi_{66\,1}$	$\pi_{66\,2}$
67	3a4	superior	36a45	unida	no trabaja	urbano	$\pi_{67\,1}$	$\pi_{67\,2}$
68	3a4	superior	36a45	unida	trabaja	urbano	$\pi_{68\,1}$	$\pi_{68\,2}$
69	3a4	superior	36a45	nounida	trabaja	urbano	$\pi_{69\,1}$	$\pi_{69\,2}$
70	5más	primaria	21a35	unida	no trabaja	rural	$\pi_{70\,1}$	$\pi_{70\,2}$
71	5más	primaria	21a35	unida	no trabaja	urbano	$\pi_{71\,1}$	$\pi_{71\,2}$
72	5más	primaria	21a35	unida	trabaja	rural	$\pi_{72\,1}$	$\pi_{72\,2}$
73	5más	primaria	21a35	unida	trabaja	urbano	$\pi_{73\,1}$	$\pi_{73\,2}$
74	5más	primaria	21a35	nounida	trabaja	rural	$\pi_{74\,1}$	$\pi_{74\,2}$
75	5más	primaria	36a45	unida	no trabaja	rural	$\pi_{75\,1}$	$\pi_{75\,2}$
76	5más	primaria	36a45	unida	no trabaja	urbano	$\pi_{76\,1}$	$\pi_{76\,2}$
77	5más	primaria	36a45	unida	trabaja	rural	$\pi_{77\,1}$	$\pi_{77\,2}$
78	5más	primaria	36a45	unida	trabaja	urbano	$\pi_{78\,1}$	$\pi_{78\,2}$
79	5más	primaria	36a45	nounida	no trabaja	urbano	$\pi_{79\,1}$	$\pi_{79\,2}$
80	5más	primaria	36a45	nounida	trabaja	rural	$\pi_{80\,1}$	$\pi_{80\,2}$
81	5más	primaria	36a45	nounida	trabaja	urbano	$\pi_{80\,1}$	$\pi_{80\,2}$
82	5más	secund	21a35	unida	no trabaja	urbano	$\pi_{82\,1}$	$\pi_{82\,2}$
83	5más	secund	21a35	unida	trabaja	rural	$\pi_{83\,1}$	$\pi_{83\,2}$
84	5más	secund	21a35	unida	trabaja	urbano	$\pi_{84\,1}$	$\pi_{84\,2}$
85	5más	secund	36a45	unida	no trabaja	urbano	$\pi_{85\,1}$	$\pi_{85\,2}$
86	5más	secund	36a45	unida	trabaja	rural	$\pi_{86\,1}$	$\pi_{86\,2}$
87	5más	secund	36a45	unida	trabaja	urbano	$\pi_{87\,1}$	$\pi_{87\,2}$
88	5más	secund	36a45	nounida	trabaja	urbano	$\pi_{88\,1}$	$\pi_{88\,2}$
89	5más	superior	36a45	unida	trabaja	urbano	$\pi_{89\,1}$	$\pi_{89\,2}$

TABLA B.4

DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ESTIMADA

Subpoblaciones							Deseo de tener más hijos	
	HIJOS	EDUC	EDAD	ECON	OCUP	AREA	No desea	Desea
1	1a2	primaria	21a35	unida	no trabaja	rural	0.58912	0.41088
2	1a2	primaria	21a35	unida	no trabaja	urbano	0.58276	0.41724
3	1a2	primaria	21a35	unida	trabaja	rural	0.62077	0.37923
4	1a2	primaria	21a35	unida	trabaja	urbano	0.5654	0.4346
5	1a2	primaria	21a35	nounida	no trabaja	rural	0.87273	0.12727
6	1a2	primaria	21a35	nounida	no trabaja	urbano	0.71667	0.28333
7	1a2	primaria	21a35	nounida	trabaja	rural	0.82524	0.17476
8	1a2	primaria	21a35	nounida	trabaja	urbano	0.77551	0.22449
9	1a2	primaria	36a45	unida	no trabaja	rural	0.71429	0.28571
10	1a2	primaria	36a45	unida	no trabaja	urbano	0.75926	0.24074
11	1a2	primaria	36a45	unida	trabaja	rural	0.68293	0.31707
12	1a2	primaria	36a45	unida	trabaja	urbano	0.72	0.28
13	1a2	primaria	36a45	nounida	no trabaja	urbano	0.79167	0.20833
14	1a2	primaria	36a45	nounida	trabaja	rural	0.91429	0.08571
15	1a2	primaria	36a45	nounida	trabaja	urbano	0.86957	0.13043
16	1a2	secund	21a35	unida	no trabaja	rural	0.50249	0.49751
17	1a2	secund	21a35	unida	no trabaja	urbano	0.50851	0.49149
18	1a2	secund	21a35	unida	trabaja	rural	0.55466	0.44534
19	1a2	secund	21a35	unida	trabaja	urbano	0.46898	0.53102
20	1a2	secund	21a35	nounida	no trabaja	rural	0.55263	0.44737
21	1a2	secund	21a35	nounida	no trabaja	urbano	0.60131	0.39869
22	1a2	secund	21a35	nounida	trabaja	rural	0.65517	0.34483
23	1a2	secund	21a35	nounida	trabaja	urbano	0.5561	0.4439
24	1a2	secund	36a45	unida	no trabaja	urbano	0.75728	0.24272
25	1a2	secund	36a45	unida	trabaja	urbano	0.73723	0.26277
26	1a2	secund	36a45	nounida	no trabaja	urbano	0.75	0.25
27	1a2	secund	36a45	nounida	trabaja	urbano	0.73214	0.26786
28	1a2	superior	21a35	unida	no trabaja	rural	0.5	0.5
29	1a2	superior	21a35	unida	no trabaja	urbano	0.37931	0.62069
30	1a2	superior	21a35	unida	trabaja	rural	0.4466	0.5534
31	1a2	superior	21a35	unida	trabaja	urbano	0.39418	0.60582
32	1a2	superior	21a35	nounida	no trabaja	urbano	0.51064	0.48936
33	1a2	superior	21a35	nounida	trabaja	urbano	0.43931	0.56069
34	1a2	superior	36a45	unida	no trabaja	urbano	0.66176	0.33824
35	1a2	Superior	36a45	unida	trabaja	rural	0.59091	0.40909
36	1a2	Superior	36a45	unida	trabaja	urbano	0.69106	0.30894
37	1a2	Superior	36a45	nounida	trabaja	urbano	0.65753	0.34247
38	3a4	primaria	21a35	unida	no trabaja	rural	0.85376	0.14624
39	3a4	primaria	21a35	unida	no trabaja	urbano	0.88274	0.11726
40	3a4	primaria	21a35	unida	trabaja	rural	0.87237	0.12763
41	3a4	primaria	21a35	unida	trabaja	urbano	0.89956	0.10044
42	3a4	primaria	21a35	nounida	no trabaja	urbano	0.92308	0.07692
43	3a4	primaria	21a35	nounida	trabaja	rural	0.96	0.04
44	3a4	primaria	21a35	nounida	trabaja	urbano	0.96552	0.03448
45	3a4	primaria	36a45	unida	no trabaja	rural	0.88298	0.11702
46	3a4	primaria	36a45	unida	no trabaja	urbano	0.92188	0.07813
47	3a4	primaria	36a45	unida	trabaja	rural	0.92958	0.07042

(continuación)

Subpoblaciones							Deseo de tener más hijos	
	HIJOS	EDUC	EDAD	ECON	OCUP	AREA	No desea	Desea
48	3a4	primaria	36a45	unida	trabaja	urbano	0.92	0.08
49	3a4	primaria	36a45	nounida	no trabaja	urbano	0.95	0.05
50	3a4	primaria	36a45	nounida	trabaja	rural	0.9661	0.0339
51	3a4	primaria	36a45	nounida	trabaja	urbano	0.95	0.05
52	3a4	secund	21a35	unida	no trabaja	rural	0.79817	0.20183
53	3a4	secund	21a35	unida	no trabaja	urbano	0.86064	0.13936
54	3a4	secund	21a35	unida	trabaja	rural	0.83893	0.16107
55	3a4	secund	21a35	unida	trabaja	urbano	0.84384	0.15616
56	3a4	secund	21a35	nounida	no trabaja	urbano	0.96154	0.03846
57	3a4	secund	21a35	nounida	trabaja	urbano	0.87879	0.12121
58	3a4	secund	36a45	unida	no trabaja	rural	0.91304	0.08696
59	3a4	secund	36a45	unida	no trabaja	urbano	0.88535	0.11465
60	3a4	secund	36a45	unida	trabaja	rural	0.9375	0.0625
61	3a4	secund	36a45	unida	trabaja	urbano	0.90254	0.09746
62	3a4	secund	36a45	nounida	no trabaja	urbano	0.82609	0.17391
63	3a4	secund	36a45	nounida	trabaja	urbano	0.83721	0.16279
64	3a4	superior	21a35	unida	no trabaja	urbano	0.875	0.125
65	3a4	superior	21a35	unida	trabaja	rural	0.91667	0.08333
66	3a4	superior	21a35	unida	trabaja	urbano	0.80488	0.19512
67	3a4	superior	36a45	unida	no trabaja	urbano	0.88095	0.11905
68	3a4	superior	36a45	unida	trabaja	urbano	0.87681	0.12319
69	3a4	superior	36a45	nounida	trabaja	urbano	0.86207	0.13793
70	5más	primaria	21a35	unida	no trabaja	rural	0.9589	0.0411
71	5más	primaria	21a35	unida	no trabaja	urbano	0.96117	0.03883
72	5más	primaria	21a35	unida	trabaja	rural	0.95139	0.04861
73	5más	primaria	21a35	unida	trabaja	urbano	0.98824	0.01176
74	5más	primaria	21a35	nounida	trabaja	rural	0.97674	0.02326
75	5más	primaria	36a45	unida	no trabaja	rural	0.95226	0.04774
76	5más	primaria	36a45	unida	no trabaja	urbano	0.96124	0.03876
77	5más	primaria	36a45	unida	trabaja	rural	0.97771	0.02229
78	5más	primaria	36a45	unida	trabaja	urbano	0.97091	0.02909
79	5más	primaria	36a45	nounida	no trabaja	urbano	0.95238	0.04762
80	5más	primaria	36a45	nounida	trabaja	rural	0.99355	0.00645
81	5más	primaria	36a45	nounida	trabaja	urbano	0.98901	0.01099
82	5más	secund	21a35	unida	no trabaja	urbano	0.98039	0.01961
83	5más	secund	21a35	unida	trabaja	rural	0.95238	0.04762
84	5más	secund	21a35	unida	trabaja	urbano	0.96226	0.03774
85	5más	secund	36a45	unida	no trabaja	urbano	0.97849	0.02151
86	5más	secund	36a45	unida	trabaja	rural	0.94737	0.05263
87	5más	secund	36a45	unida	trabaja	urbano	0.96296	0.03704
88	5más	secund	36a45	nounida	trabaja	urbano	0.97872	0.02128
89	5más	superior	36a45	unida	trabaja	urbano	0.98361	0.01639

TABLA B.5

MATRIZ DE DISEÑO

Subpob	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
2	1	1	0	1	0	1	1	1	-1	1	0	0	0	1	0	1
3	1	1	0	1	0	1	1	-1	1	1	0	0	0	1	0	1
4	1	1	0	1	0	1	1	-1	-1	1	0	0	0	1	0	1
5	1	1	0	1	0	1	-1	1	1	1	0	0	0	1	0	-1
6	1	1	0	1	0	1	-1	1	-1	1	0	0	0	1	0	-1
7	1	1	0	1	0	1	-1	-1	1	1	0	0	0	1	0	-1
8	1	1	0	1	0	1	-1	-1	-1	1	0	0	0	1	0	-1
9	1	1	0	1	0	-1	1	1	1	1	0	0	0	-1	0	1
10	1	1	0	1	0	-1	1	1	-1	1	0	0	0	-1	0	1
11	1	1	0	1	0	-1	1	-1	1	1	0	0	0	-1	0	1
12	1	1	0	1	0	-1	1	-1	-1	1	0	0	0	-1	0	1
13	1	1	0	1	0	-1	-1	1	-1	1	0	0	0	-1	0	-1
14	1	1	0	1	0	-1	-1	-1	1	1	0	0	0	-1	0	-1
15	1	1	0	1	0	-1	-1	-1	-1	1	0	0	0	-1	0	-1
16	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1
17	1	1	0	0	1	1	1	1	-1	0	1	0	0	1	0	1
18	1	1	0	0	1	1	1	-1	1	0	1	0	0	1	0	1
19	1	1	0	0	1	1	1	-1	-1	0	1	0	0	1	0	1
20	1	1	0	0	1	1	-1	1	1	0	1	0	0	1	0	-1
21	1	1	0	0	1	1	-1	1	-1	0	1	0	0	1	0	-1
22	1	1	0	0	1	1	-1	-1	1	0	1	0	0	1	0	-1
23	1	1	0	0	1	1	-1	-1	-1	0	1	0	0	1	0	-1
24	1	1	0	0	1	-1	1	1	-1	0	1	0	0	-1	0	1
25	1	1	0	0	1	-1	1	-1	-1	0	1	0	0	-1	0	1
26	1	1	0	0	1	-1	-1	1	-1	0	1	0	0	-1	0	-1
27	1	1	0	0	1	-1	-1	-1	-1	0	1	0	0	-1	0	-1
28	1	1	0	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	0	0	1	0	1
29	1	1	0	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	1	0	1
30	1	1	0	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	0	0	1	0	1
31	1	1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	0	0	1	0	1
32	1	1	0	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	0	0	1	0	-1
33	1	1	0	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	1	0	-1
34	1	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	0	0	-1	0	1
35	1	1	0	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	0	0	-1	0	1
36	1	1	0	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	0	1
37	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	0	-1
38	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0
39	1	0	1	1	0	1	1	1	-1	0	0	1	0	0	1	0
40	1	0	1	1	0	1	1	-1	1	0	0	1	0	0	1	0
41	1	0	1	1	0	1	1	-1	-1	0	0	1	0	0	1	0
42	1	0	1	1	0	1	-1	1	-1	0	0	1	0	0	1	0
43	1	0	1	1	0	1	-1	-1	1	0	0	1	0	0	1	0
44	1	0	1	1	0	1	-1	-1	-1	0	0	1	0	0	1	0
45	1	0	1	1	0	-1	1	1	1	0	0	1	0	0	-1	0
46	1	0	1	1	0	-1	1	1	-1	0	0	1	0	0	-1	0
47	1	0	1	1	0	-1	1	-1	1	0	0	1	0	0	-1	0
48	1	0	1	1	0	-1	1	-1	-1	0	0	1	0	0	-1	0

Continuación

Subpob	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
49	1	0	1	1	0	-1	-1	1	-1	0	0	1	0	0	-1	0
50	1	0	1	1	0	-1	-1	-1	1	0	0	1	0	0	-1	0
51	1	0	1	1	0	-1	-1	-1	-1	0	0	1	0	0	-1	0
52	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0
53	1	0	1	0	1	1	1	1	-1	0	0	0	1	0	1	0
54	1	0	1	0	1	1	1	-1	1	0	0	0	1	0	1	0
55	1	0	1	0	1	1	1	-1	-1	0	0	0	1	0	1	0
56	1	0	1	0	1	1	-1	1	-1	0	0	0	1	0	1	0
57	1	0	1	0	1	1	-1	-1	-1	0	0	0	1	0	1	0
58	1	0	1	0	1	-1	1	1	1	0	0	0	1	0	-1	0
59	1	0	1	0	1	-1	1	1	-1	0	0	0	1	0	-1	0
60	1	0	1	0	1	-1	1	-1	1	0	0	0	1	0	-1	0
61	1	0	1	0	1	-1	1	-1	-1	0	0	0	1	0	-1	0
62	1	0	1	0	1	-1	-1	1	-1	0	0	0	1	0	-1	0
63	1	0	1	0	1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	1	0	-1	0
64	1	0	1	-1	-1	1	1	1	-1	0	0	-1	-1	0	1	0
65	1	0	1	-1	-1	1	1	-1	1	0	0	-1	-1	0	1	0
66	1	0	1	-1	-1	1	1	-1	-1	0	0	-1	-1	0	1	0
67	1	0	1	-1	-1	-1	1	1	-1	0	0	-1	-1	0	-1	0
68	1	0	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	0	0	-1	-1	0	-1	0
69	1	0	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	0	-1	0
70	1	-1	-1	1	0	1	1	1	1	-1	0	-1	0	-1	-1	-1
71	1	-1	-1	1	0	1	1	1	-1	-1	0	-1	0	-1	-1	-1
72	1	-1	-1	1	0	1	1	-1	1	-1	0	-1	0	-1	-1	-1
73	1	-1	-1	1	0	1	1	-1	-1	-1	0	-1	0	-1	-1	-1
74	1	-1	-1	1	0	1	-1	-1	1	-1	0	-1	0	-1	-1	1
75	1	-1	-1	1	0	-1	1	1	1	-1	0	-1	0	1	1	-1
76	1	-1	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	0	-1	0	1	1	-1
77	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	0	-1	0	1	1	-1
78	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	-1	-1	0	-1	0	1	1	-1
79	1	-1	-1	1	0	-1	-1	1	-1	-1	0	-1	0	1	1	1
80	1	-1	-1	1	0	-1	-1	-1	1	-1	0	-1	0	1	1	1
81	1	-1	-1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	-1	0	1	1	1
82	1	-1	-1	0	1	1	1	1	-1	0	-1	0	-1	-1	-1	-1
83	1	-1	-1	0	1	1	1	-1	1	0	-1	0	-1	-1	-1	-1
84	1	-1	-1	0	1	1	1	-1	-1	0	-1	0	-1	-1	-1	-1
85	1	-1	-1	0	1	-1	1	1	-1	0	-1	0	-1	1	1	-1
86	1	-1	-1	0	1	-1	1	-1	1	0	-1	0	-1	1	1	-1
87	1	-1	-1	0	1	-1	1	-1	-1	0	-1	0	-1	1	1	-1
88	1	-1	-1	0	1	-1	-1	-1	-1	0	-1	0	-1	1	1	1
89	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1

Continuación:

Subpob	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
2	0	1	0	1	0	1	-1	-1	0
3	0	1	0	1	0	1	-1	1	0
4	0	1	0	1	0	1	1	-1	0
5	0	-1	0	1	0	-1	1	1	0
6	0	-1	0	1	0	-1	-1	-1	0
7	0	-1	0	1	0	-1	-1	1	0
8	0	-1	0	1	0	-1	1	-1	0
9	0	1	0	-1	0	-1	1	-1	0
10	0	1	0	-1	0	-1	-1	1	0
11	0	1	0	-1	0	-1	-1	-1	0
12	0	1	0	-1	0	-1	1	1	0
13	0	-1	0	-1	0	1	-1	1	0
14	0	-1	0	-1	0	1	-1	-1	0
15	0	-1	0	-1	0	1	1	1	0
16	0	0	1	0	1	1	1	1	0
17	0	0	1	0	1	1	-1	-1	0
18	0	0	1	0	1	1	-1	1	0
19	0	0	1	0	1	1	1	-1	0
20	0	0	-1	0	1	-1	1	1	0
21	0	0	-1	0	1	-1	-1	-1	0
22	0	0	-1	0	1	-1	-1	1	0
23	0	0	-1	0	1	-1	1	-1	0
24	0	0	1	0	-1	-1	-1	1	0
25	0	0	1	0	-1	-1	1	1	0
26	0	0	-1	0	-1	1	-1	1	0
27	0	0	-1	0	-1	1	1	1	0
28	0	-1	-1	-1	-1	1	1	1	0
29	0	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	0
30	0	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	0
31	0	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	0
32	0	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	0
33	0	1	1	-1	-1	-1	1	-1	0
34	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	0
35	0	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	0
36	0	-1	-1	1	1	-1	1	1	0
37	0	1	1	1	1	1	1	1	0
38	1	1	0	1	0	1	1	0	1
39	1	1	0	1	0	1	-1	0	-1
40	1	1	0	1	0	1	-1	0	1
41	1	1	0	1	0	1	1	0	-1
42	-1	-1	0	1	0	-1	-1	0	-1
43	-1	-1	0	1	0	-1	-1	0	1
44	-1	-1	0	1	0	-1	1	0	-1
45	1	1	0	-1	0	-1	1	0	-1
46	1	1	0	-1	0	-1	-1	0	1
47	1	1	0	-1	0	-1	-1	0	-1
48	1	1	0	-1	0	-1	1	0	1
49	-1	-1	0	-1	0	1	-1	0	1
50	-1	-1	0	-1	0	1	-1	0	-1
51	-1	-1	0	-1	0	1	1	0	1
52	1	0	1	0	1	1	1	0	1
53	1	0	1	0	1	1	-1	0	-1

Continuación

Subpob	17	18	19	20	21	22	23	24	25
54	1	0	1	0	1	1	-1	0	1
55	1	0	1	0	1	1	1	0	-1
56	-1	0	-1	0	1	-1	-1	0	-1
57	-1	0	-1	0	1	-1	1	0	-1
58	1	0	1	0	-1	-1	1	0	-1
59	1	0	1	0	-1	-1	-1	0	1
60	1	0	1	0	-1	-1	-1	0	-1
61	1	0	1	0	-1	-1	1	0	1
62	-1	0	-1	0	-1	1	-1	0	1
63	-1	0	-1	0	-1	1	1	0	1
64	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	0	-1
65	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	0	1
66	1	-1	-1	-1	-1	1	1	0	-1
67	1	-1	-1	1	1	-1	-1	0	1
68	1	-1	-1	1	1	-1	1	0	1
69	-1	1	1	1	1	1	1	0	1
70	-1	1	0	1	0	1	1	-1	-1
71	-1	1	0	1	0	1	-1	1	1
72	-1	1	0	1	0	1	-1	-1	-1
73	-1	1	0	1	0	1	1	1	1
74	1	-1	0	1	0	-1	-1	-1	-1
75	-1	1	0	-1	0	-1	1	1	1
76	-1	1	0	-1	0	-1	-1	-1	-1
77	-1	1	0	-1	0	-1	-1	1	1
78	-1	1	0	-1	0	-1	1	-1	-1
79	1	-1	0	-1	0	1	-1	-1	-1
80	1	-1	0	-1	0	1	-1	1	1
81	1	-1	0	-1	0	1	1	-1	-1
82	-1	0	1	0	1	1	-1	1	1
83	-1	0	1	0	1	1	-1	-1	-1
84	-1	0	1	0	1	1	1	1	1
85	-1	0	1	0	-1	-1	-1	-1	-1
86	-1	0	1	0	-1	-1	-1	1	1
87	-1	0	1	0	-1	-1	1	-1	-1
88	1	0	-1	0	-1	1	1	-1	-1
89	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1

BIBLIOGRAFIA

AGRESTI, ALAN. (1990). *Categorical Data Analysis.* Editorial Jhon Wiley & sons - EE. UU.

BRADLEY, EDWIN L. (1973). *The Equivalence of Maximum Likelihood and Wheighted Least Squares Estimates in the Exponencial Family*

MCGULLAC, P ; NELDER J.A (1985). *Generalized Linear Models.* Editorial University Press, Cambridge - Gran Bretaña. Tercera edición.

CORDEIRO, GAUSS M. *Introducao á Teoria de Verossimilhanca.*

CHARNES, A ; FROME, E.L ; YU, P.L. (1976) *The Equivalencie of Generalized Least Squares and Maximum Likelihood Estimates in the Exponencial Family*. Journal of the American Statistical Association. 71, 169-171.

EVERITT, B.S (1992). *The Analysis of contingency tables*. Editorial Chapman & Hall -Gran Bretaña. Segunda edición.

FORTHOFER,RON N ; LEHNEN ROBERT G (1981). *Public Program Analysis.* Editorial Wadsworth, inc. EE.UU.

FREEMEN, DANIEL H JR. (1987). *Applied Categorical Data Analysis.* Editorial Marcel Dekker. INC - EE.UU.

FRIENDLY, MICHAEL (1995). *Conceptual and Visual Models for Categorical Data.* The American Statistical Association. 49, 153-160.

HILLIS, STEPHEN ; DAVIS, CHARNES (1994). *A simple Justification of the Iterative Fitting Procedure for Generalized Linear Models.* The American Statistical Association. 48, 288-289

MONTGOMERY, DOUGLAS C ; ELIZABETH A. PECK. (1982). *Introduccion to Linear Regression Analysis.* Editorial Jhon Wiley & sons. -EE.UU

NELDER, J.A ; WEDDERBURN R.W.M (1972). *Generalized Linear Models*. Journal of the Royal Statistical Association. 135, 370-384.

SEARLE, S.R ; (1970). *Linear models.*