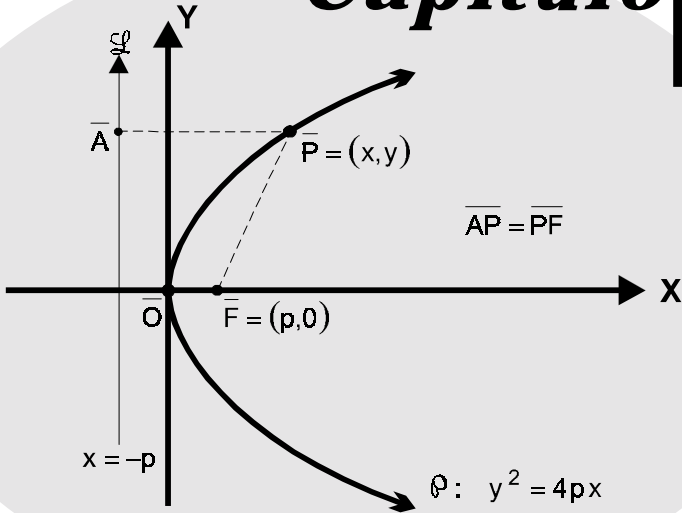


Capítulo 6



LA PARÁBOLA

- 46** Obtener la ecuación de la parábola con vértice en el origen y cuya directriz es $y = 2$.

Solución:

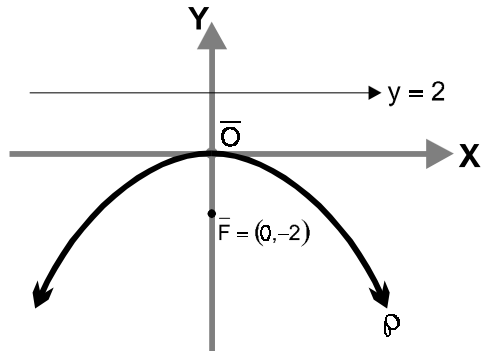
Del gráfico, se tiene:

$$: x^2 = -4py \longrightarrow \textcircled{1}$$

$$p = 2$$

En $\textcircled{1}$:

$$\rightarrow \boxed{: x^2 = -8y}$$



- 47** Hallar la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta $x = -6$ y su foco es $\bar{F} = (0,0)$.

Solución:

Del gráfico :

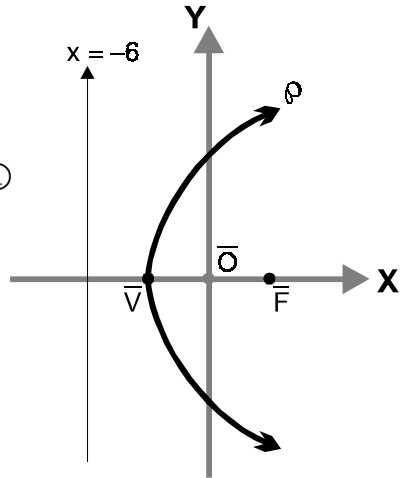
$$: (y - k)^2 = 4p(x - h) \longrightarrow \textcircled{1}$$

Como: $\bar{V} = (-3,0)$ y $p = |FV| = 3$

En $\textcircled{1}$:

$$\rightarrow : y^2 = 12(x + 3)$$

$$: y^2 = 12x + 36$$



- 48** Calcular el radio focal del punto \bar{M} de la parábola $y^2 = 20x$ si la abscisa del punto \bar{M} es igual a 7.

Solución:

$$: y^2 = 20x \longrightarrow \textcircled{1}$$

De $\textcircled{1}$: $4p = 20 \rightarrow p = 5$

de donde: $\bar{F} = (5,0)$

$$\bar{M} = (7, y_1) \in$$

En $\textcircled{1}$:

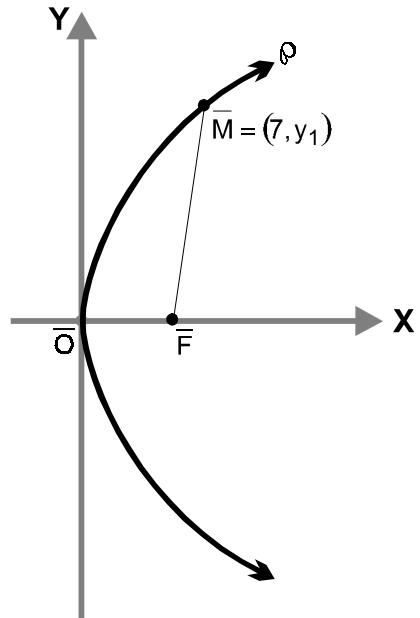
$$\rightarrow y_1^2 = 20(7) \rightarrow y_1 = \pm\sqrt{140}$$

$$\rightarrow \bar{M} = (7, \pm\sqrt{140})$$

Por lo tanto:

$$|FM| = \sqrt{(\sqrt{140} - 0)^2 + (7 - 5)^2}$$

$$|FM| = \sqrt{144} = 12$$



- 49** Dada la ecuación de la parábola $x^2 + 8y - 2x = 7$. Hallar el vértice, eje, foco y directriz. Trazar la curva.

Solución:

$$: x^2 + 8y - 2x = 7$$

Completando cuadrados

$$: x^2 + 8y - 2x = 7 \quad \rightarrow \quad : x^2 - 2x + 1 = -8y + 7 + 1$$

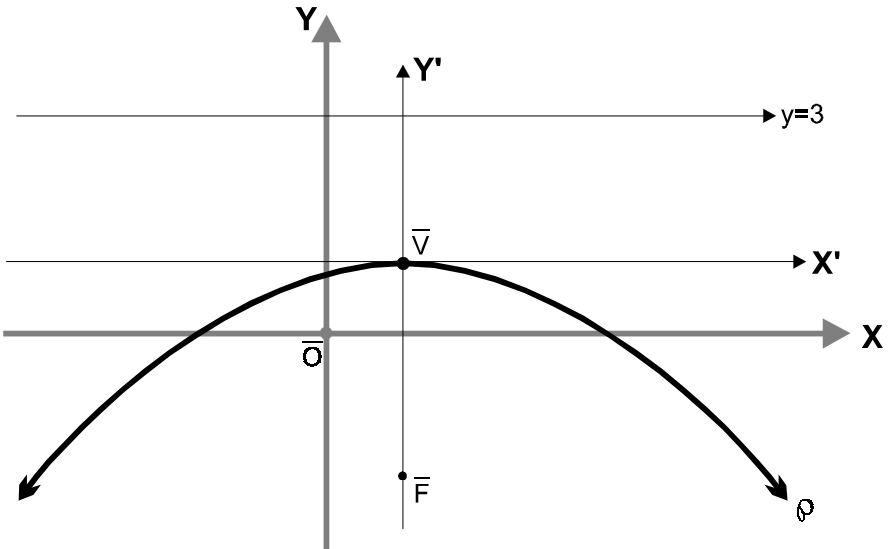
$$: (x - 1)^2 = -8y + 8 \quad \rightarrow \quad : (x - 1)^2 = -8(y - 1)$$

Luego, las coordenadas del vértice de la parábola: $\bar{V} = (h, k) = (1, 1)$

Seguidamente: $4p = -8 \rightarrow p = -2$

Ahora, las coordenadas del foco: $\bar{F} = (h, k + p) = (1, -1)$

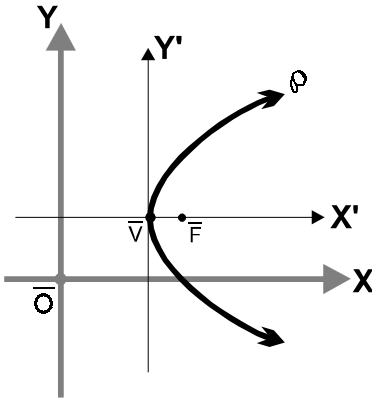
- Ecuación del eje: $x = 1$
- Ecuación de la directriz: $y = 3$



Capítulo 6. LA PARÁBOLA

- 50** Encontrar la ecuación de la parábola, cuyo vértice es el punto $\bar{V} = (3,2)$ y el foco es $\bar{F} = (4,2)$.

Solución:



$$: (y-k)^2 = 4p(x-h) \longrightarrow \textcircled{1}$$

Dado que se conoce el vértice y el foco :

$$p = |VF| = 1$$

Reemplazando los valores en $\textcircled{1}$:

$$\rightarrow : (y-2)^2 = 4(1)(x-3)$$

$$(y-2)^2 = 4(x-3)$$

$$: y^2 = 4y + 4x - 16$$

- 51** Obtener la ecuación de la parábola con foco en $\bar{F} = (2,3)$ y cuya ecuación de la directriz es $x = -6$.

Solución:

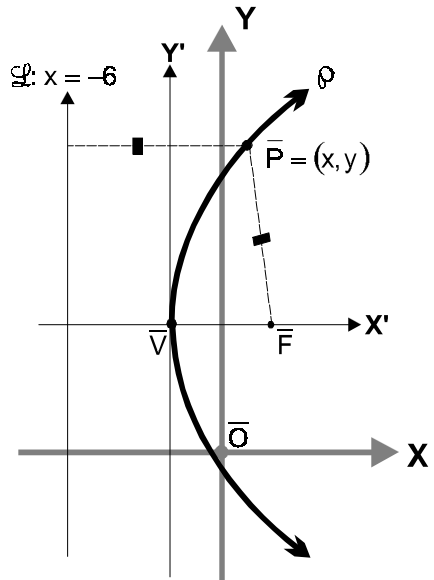
Del gráfico :

- o $|FP| = \text{Distancia de } \bar{P} \text{ a } x = -6$
a < (definición)

$$\rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = x+6$$

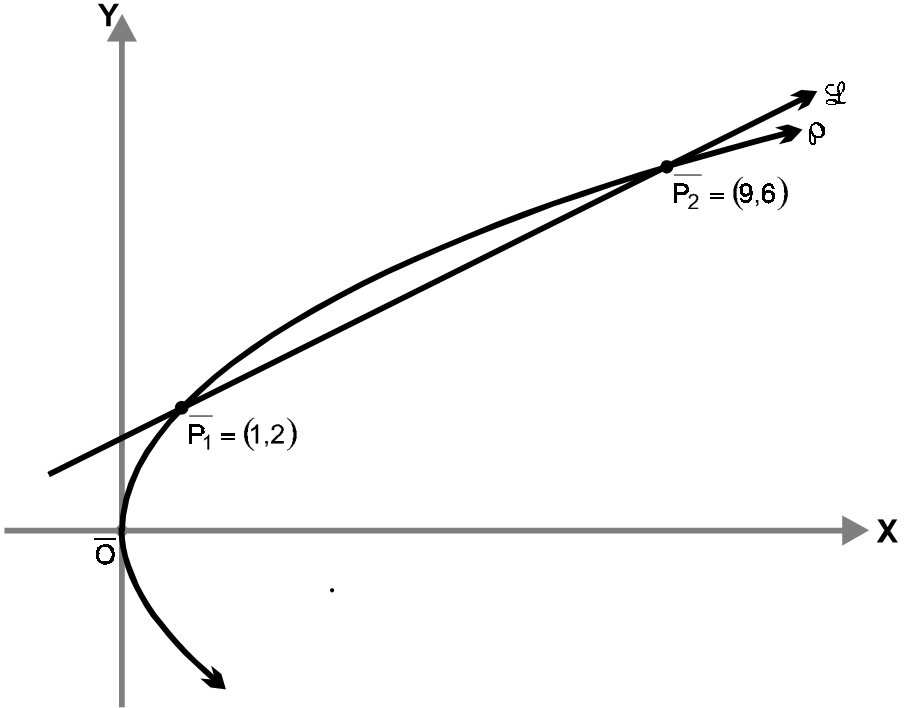
Efectuando operaciones :

$$\rightarrow : y^2 - 16x - 6y - 23 = 0$$



- 52** Determinar la longitud del segmento determinado por la ecuación $y^2 = 4x$, con la recta de ecuación $x = 2y - 3$.

Solución:



Tenemos:
$$\begin{cases} : y^2 = 4x & \longrightarrow \textcircled{1} \\ < : x = 2y - 3 & \longrightarrow \textcircled{2} \end{cases}$$

De $\textcircled{1}$ y $\textcircled{2}$ obtenemos los puntos
$$\begin{cases} \overline{P_1} = (1, 2) \\ \overline{P_2} = (9, 6) \end{cases}$$

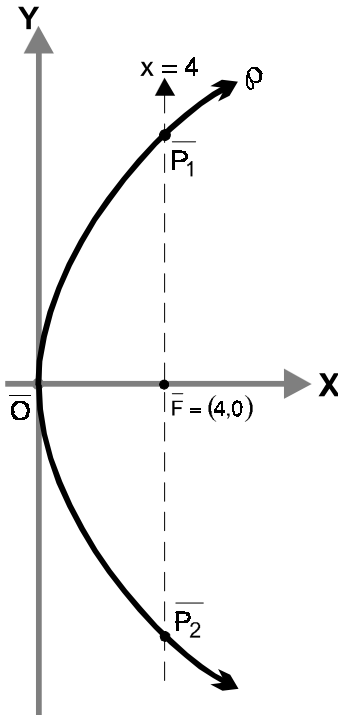
$\overline{P_1}$ y $\overline{P_2}$ intersección de las dos gráficas :

Luego :

$$|P_1 P_2| = \sqrt{(9-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{64+16} \iff |P_1 P_2| = 4\sqrt{5} \approx 8,94$$

- 53** Determinar la ecuación de una circunferencia que tiene por diámetro la cuerda normal de la parábola, cuya ecuación es $y^2 = 16x$.

Solución:



$$: y^2 = 16x \longrightarrow \textcircled{1}$$

se deduce que el vértice $\bar{V} = (h,k) = (0,0)$

También: $\bar{F} = (h+p,k) = (4,0)$

Luego, la cuerda normal (lado recto)

$$\rightarrow \text{CN: } x = 4 \longrightarrow \textcircled{2}$$

$$\text{De } \textcircled{1} \text{ y } \textcircled{2}: \rightarrow \begin{cases} \bar{P}_1 = (4,8) \\ \bar{P}_2 = (4,-8) \end{cases}$$

$$\circ r = |FP_1| = |P_2F| = 8 \iff r^2 = 64$$

Siendo \bar{C} centro de la circunferencia

$$\rightarrow \bar{C} = \bar{F} \iff \bar{C} = (4,0)$$

Por lo tanto:

$$C: (x-4)^2 + y^2 = 64$$

$$C: x^2 + y^2 - 8x - 48 = 0$$

- 54** Una recta que pasa por el foco de una parábola con el vértice en el origen y con el eje horizontal, corta a la directriz en el punto $\bar{A} = (-3,8)$. Calcular las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola y la recta.

Solución:

$$\circ : y^2 = 4px \longrightarrow \textcircled{1}$$

y su vértice $\bar{V} = (h,k) = (0,0)$

PROBLEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

Además: $p=3 \longrightarrow \textcircled{2}$

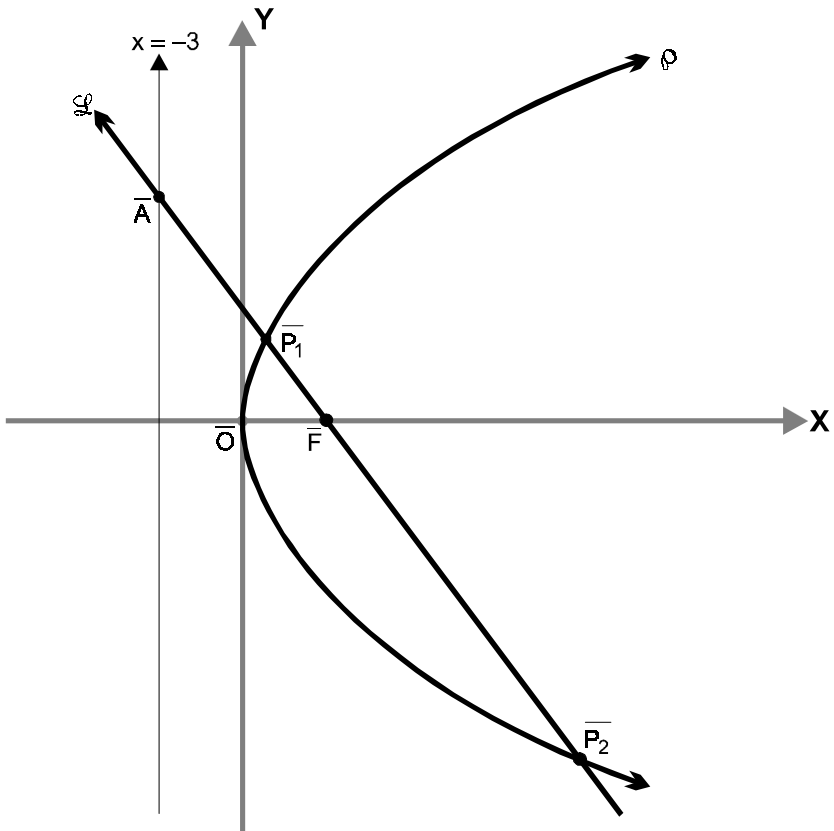
$\textcircled{2}$ en $\textcircled{1}$: $y^2 = 12x \longrightarrow \textcircled{3}$

$$\circ < : \begin{cases} \bar{A} = (-3, 8) \\ \bar{F} = (h+p, k) = (3, 0) \end{cases} \Rightarrow m_{<} = m_{\bar{A}\bar{F}} = -\frac{4}{3}$$

$$< : y - 0 = m_{<} (x - 3)$$

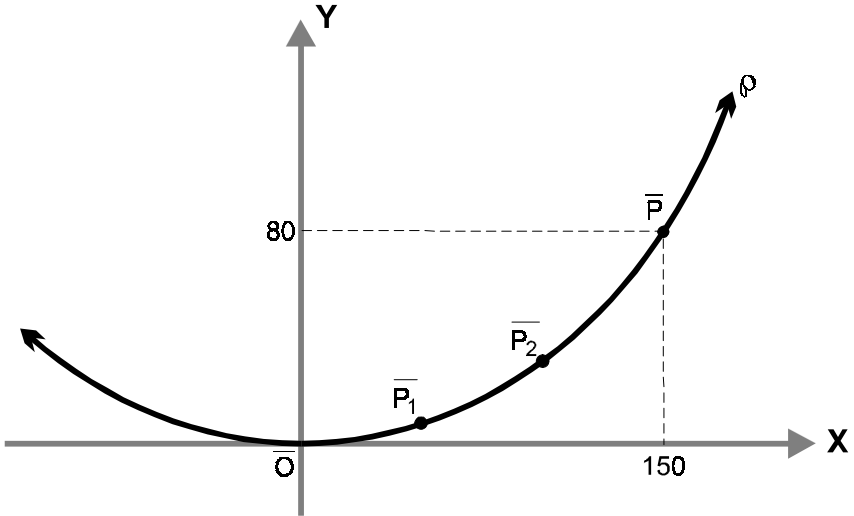
$$y = -\frac{4}{3}(x - 3) \iff < : 4x + 3y - 12 = 0 \longrightarrow \textcircled{4}$$

$$\text{De } \textcircled{3} \text{ y } \textcircled{4} : \bar{P} : \begin{cases} : y^2 = 12x \\ < : 4x + 3y - 12 = 0 \end{cases} \iff \begin{array}{|l} \bar{P}_1 = (3/4, 3) \\ \bar{P}_2 = (12, -12) \end{array}$$



55 Las dos torres de suspensión de un puente colgante distan entre sí 300 m. y se extienden 80 m por encima de la calzada. Si el cable (que tiene la forma de una parábola) es tangente a la calzada en el centro del puente, determinar la altura del cable por encima de la pista a 50 m y también a 100 m del centro del puente. (Asumir que la pista es horizontal).

Solución:



Del gráfico, se observa que : $x^2 = 4py$ \longrightarrow ①

◦ $\bar{P} = (150, 80) \in$.

$$\Rightarrow 150^2 = 4p(80) \iff 4p = \frac{75 \times 15}{4}$$

En ①: : $x^2 = \frac{75 \times 15}{4}y$

Luego :

$$\circ \bar{P}_1 = (50, y_1) \in \quad \Rightarrow 50^2 = \frac{75 \times 15}{4}y_1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{80}{9} \approx 8,88 \text{ m}$$

$$\circ \bar{P}_2 = (100, y_2) \in \quad \Rightarrow 100^2 = \frac{75 \times 15}{4}y_2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{320}{9} \approx 35,55 \text{ m}$$