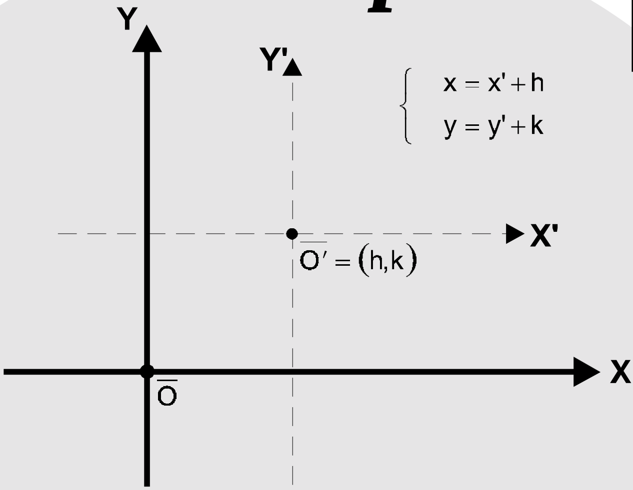
Capítulo 5



TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

39 Por una traslación de ejes, transformar la ecuación:

$3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0$

en otra que carezca de términos de primer grado.

Solución:

Completando cuadrados:

$$3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0$$

$$3\left(x^2 - 14x + 49\right) - 2\left(y^2 + 2y + 1\right) = -133 + 147 - 2$$

$$3(x-7)^2 - 2(y+1)^2 = 12$$

Siendo : $\begin{cases} x' = x - 7 \\ y' = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{3x'^2 - 2y'^2 = 12}$

40 Simplificar la ecuación:

$$72x^2 + 36y^2 - 48x + 36y - 55 = 0$$

por una traslación de los ejes coordenados.

Solución:

Completando cuadrados:

$$72x^2 + 36y^2 - 48x + 36y - 55 = 0$$

$$72\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + 36\left(y^2 + y + 1\right) = 55 + 8 + 9$$

$$72\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 36\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 72$$

$$2\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

Siendo: $\begin{cases} x' = x - \dfrac{1}{3} \\ y' = y + \dfrac{1}{2} \end{cases}$ ➡ $\boxed{2x'^2 + y'^2 = 2}$

41 Por una traslación de ejes, simplificar la ecuación:

$$x^2 - 2y^2 + 8x + 4y - 3 = 0$$

Solución:

Completando cuadrados en la expresión, se tiene:

$$\left(x^2 - 8x + 16\right) - 2\left(y^2 - 2y + 1\right) = 3 + 16 - 2$$

$$(x - 4)^2 - 2(y - 1)^2 = 17$$

Siendo: $\begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y - 1 \end{cases}$ ➡ $\boxed{x'^2 - 2y'^2 = 17}$

42 Por medio de una traslación de ejes, eliminar los términos de primer grado de la ecuación: $2xy - x - y + 4 = 0$

Solución:

$$2xy - x - y + 4 = 0 \longrightarrow ①$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \longrightarrow ②$$

② en ①:

$$2(x'+h)(y'+k) - (x'+h) - (y'+k)$$

$$2x'y' + 2kx' + 2ky' + 2hk - x' - h - y' - k + 4$$

$$2x'y' + (2k-1)x' + (2h-1)y' + 2hk - h - k + 4 = 0 \longrightarrow ③$$

De donde: $\begin{cases} 2k-1=0 \\ 2h-1=0 \end{cases} \Rightarrow h = k = \dfrac{1}{2}$

Luego en ③:

$$2x'y' + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{4x'y' + 7 = 0}$$

43 Por una rotación de los ejes coordenados, transformar la ecuación:

$16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25x = 0$

en otra que carezca del término en xy.

Solución:

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25x = 0 \longrightarrow ①$$

Luego: $\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y &= x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \end{aligned}\right\} \longrightarrow ②$

Ahora ② en ①:

$$\left(16\cos^2\theta+24\operatorname{sen}\theta\cos\theta+9\operatorname{sen}^2\theta\right)x'^2+$$
$$+\left(16\operatorname{sen}^2\theta-24\operatorname{sen}\theta\cos\theta+9\cos^2\theta\right)y'^2+$$
$$+\left(24\cos^2\theta-32\operatorname{sen}\theta\cos\theta-24\operatorname{sen}^2\theta+18\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)x'y'+$$
$$+25\,x'\cos\theta-25\,y'\operatorname{sen}\theta=0 \longrightarrow \otimes$$

Luego para eliminar el término x' e y'

➡ $24\cos^2\theta-32\operatorname{sen}\theta\cos\theta-24\operatorname{sen}^2\theta+18\operatorname{sen}\theta\cos\theta=0$

$24\cos^2\theta-24\operatorname{sen}^2\theta-14\operatorname{sen}\theta\cos\theta=0$

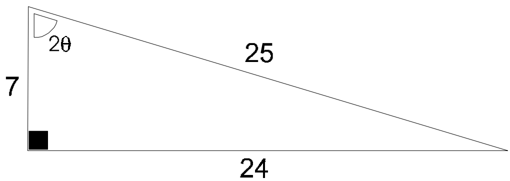
$24\left(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta\right)-14\operatorname{sen}\theta\cos\theta=0$

$24\cos 2\theta-7\times 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta=0$

$24\cos 2\theta-7\operatorname{sen}2\theta=0$

Dividiendo $\times\cos 2\theta$:

➡ $24-7\operatorname{tg}2\theta=0$ ➡ $\operatorname{tg}2\theta=\dfrac{24}{7}$



Luego de la figura:

➡ $\cos 2\theta=\dfrac{7}{25}$

Además:

∘ $\operatorname{sen}\theta=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{7}{25}}{2}}=\sqrt{\dfrac{9}{25}}$ ➡ $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{3}{5}$

∘ $\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\frac{7}{25}}{2}}=\sqrt{\dfrac{16}{25}}$ ➡ $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

En $\otimes$:

$$\Rightarrow\quad (4\cos\theta+3\,\text{sen}\theta)^2 x'^2+(4\,\text{sen}\theta+3\cos\theta)\,y'^2+25x'\cos\theta-25y'\,\text{sen}\theta=0$$

$$\left(4\cdot\frac{4}{5}+3\cdot\frac{3}{5}\right)^2 x'^2+\left(4\cdot\frac{3}{5}+3\cdot\frac{4}{5}\right)y'^2+25\cdot\frac{4}{5}x'-25\cdot\frac{3}{5}y'=0$$

$$25x'^2+20x'-15y'=0$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{5x'^2+4x'-3y'=0}$$

44 Simplificar la ecuación:

$$x^2-10xy+y^2-10x+2y+13=0$$

por transformación de coordenadas.

Solución:

$$x^2-10xy+y^2-10x+2y+13=0 \longrightarrow ①$$

$$\text{Luego}:\ \begin{cases} x=x'+h \\ y=y'+k \end{cases} \longrightarrow ②$$

② en ①:

$$x'^2+2hx'+h^2-10x'y'-10kx'-10hy'-10hk+y'^2+2ky'+k^2-$$
$$-10x'-10h+2y'+2k+13=0$$

$$x'^2+y'^2+(2h-10k-10)x'+(2+2k-10h)y'+$$
$$+k^2-10hk-10h+2k+13=0 \longrightarrow \otimes$$

Para eliminar los términos x' e y'; debe cumplirse que

$$\begin{cases} 2h-10k-10=0 \\ 2+2k-10h=0 \end{cases} \Rightarrow\quad h=0;\quad k=-1$$

En $\otimes$:

$$\Rightarrow \quad x'^2 + y'^2 - 10x'y' + 1 - 2 + 13 = 0$$

$$x'^2 + y'^2 - 10x'y' + 12 = 0 \quad ......③$$

$$\text{Pero:} \quad \left.\begin{array}{l} x' = x''\cos\theta - y''\operatorname{sen}\theta \\ y' = x''\operatorname{sen}\theta + y''\cos\theta \end{array}\right\} \quad ......④$$

④ en ③:

$$\Rightarrow \quad x''^2\cos^2\theta - 2x''y''\operatorname{sen}\theta\cos\theta + y''^2\operatorname{sen}^2\theta + x''^2\operatorname{sen}^2\theta +$$

$$+ 2x''y''\operatorname{sen}\theta\cos\theta + y''^2\cos^2\theta - 10 + x''^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta -$$

$$-10x''y''\cos^2\theta + 10x''y''\operatorname{sen}\theta + 10y''^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 12 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta - 10\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)x''^2 +$$

$$\left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + 10\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)y''^2 +$$

$$+ \left(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 10\cos^2\theta + 10\operatorname{sen}^2\theta\right)x''y'' + 12 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 - 10\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)x''^2 + \left(1 + 10\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)y''^2 +$$

$$+ \left(-10\cos^2\theta + 10\operatorname{sen}^2\theta\right)x''y'' + 12 = 0 \quad ......\oplus$$

Ahora para eliminar el término x´´y´´:

$$\Rightarrow \quad -10\cos^2\theta + 10\operatorname{sen}^2\theta = 0$$

$$-10\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 2\theta = 0$$

Además :

- $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Reemplazando en $\oplus$:

➡ $\left(1-10\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)x''^2 + \left(1+10\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)y''^2 + 12 = 0$

$(1-5)\,x''^2 + (1+5)\,y''^2 + 12 = 0$

$-4x''^2 + 6y''^2 + 12 = 0$

Dividiendo $\times 2$:

➡ $\boxed{2x''^2 - 3y''^2 - 6 = 0}$

45 Un punto $\overline{P}$ se mueve de tal modo que la diferencia de sus distancias a los dos puntos $\overline{A} = (1,4)$ y $\overline{B} = (-2,1)$ es siempre igual a 3. Hallar la ecuación del lugar geométrico y simplificarla por transformación de coordenadas.

Solución:

Sea $\overline{P} = (x,y)$ el punto que se mueve.

De la condición :

➡ $|AP| - |BP| = 3$

$\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} - \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = 3$

Efectuando operaciones se tiene :

➡ $20x - 4y - 8xy + 9 = 0 \longrightarrow$ ①

Pero :

➡ $\left.\begin{array}{l} x = x' + h \\ y = y' + k \end{array}\right\} \longrightarrow$ ②

Luego :

➡ $(20 - 8k)x' - (4 + 8h)y' - 8x'y' + 20h - 4k - 8hk + 19 = 0 \longrightarrow$ ③

Ahora para eliminar los términos x' e y':

➡ $\left.\begin{array}{l} 20 - 8k = 0 \\ 4 + 8h = 0 \end{array}\right\}$ ➡ $h = \frac{5}{2}$; $k = -\frac{1}{2}$

② en ③ :

➡ $-8x'y' + 10\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{5}{2}\right) - 8\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) + 19 = 0$

$-8x'y' - 10 - 10 + 10 + 19 = 0$

➡ $\boxed{-8x'y' - 9 = 0}$