

## 6. REDUCCIÓN DE SINGULARIDADES CON MULTIPLICIDAD UNO

Sea  $p \in \mathcal{M}^n$  un punto singular irreducible de la foliación  $\mathcal{F}_Z$ . Si  $p$  es dicrítico, entonces su blowing-up es no-singular, por lo tanto, debemos considerar el caso en que  $p$  es no dicrítico. Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  los autovalores de la parte lineal de  $DZ(p)$ , entonces el polinomio característico de la matriz  $M = DZ(p)$  es dado por:

$$(6.1) \quad \Delta(t) = \prod_{k=1}^s (t - \lambda_k)^{r_k}$$

en donde  $\sum_{k=1}^s r_k = n$ .

Por lo tanto, existen  $z = (z_1, \dots, z_n)$  coordenadas locales de una vecindad de  $p$  en  $\mathcal{M}^n$  tal que  $p = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$  y la matriz  $M$  tiene forma canónica de Jordan:

$$(6.2) \quad M = \begin{pmatrix} M_1 & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & M_2 & \dots & \Theta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Theta & \Theta & \dots & M_s \end{pmatrix}$$

donde  $M_k \in \mathbb{C}^{r_k \times r_k}$  es el bloque de Jordan correspondiente al autovalor  $\lambda_k$  i.e.:

$$(6.3) \quad M_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & \epsilon_1^{(k)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & \epsilon_2^{(k)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k & \epsilon_{r_k-1}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

donde  $\epsilon_i^{(k)} \in \{0, 1\}$ ,  $1 \leq i \leq r_k - 1$  y  $1 \leq k \leq s$ .

Una condición necesaria y suficiente para que  $\tilde{\mathcal{F}}_Z$  tenga una singularidad aislada es que  $\epsilon_i^{(k)} = 1, \forall 1 \leq i \leq r_k - 1$  y  $1 \leq k \leq s$ . Más específicamente, tenemos el siguiente resultado:

**PROPOSICIÓN 2.** Sea  $p \in \mathcal{M}^n$  un punto singular, irreducible y no dicrítico de la foliación  $\mathcal{F}_Z$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $\text{Sing}(\mathcal{F}_Z)$  es un conjunto finito.
- (2)

$$(6.4) \quad DZ(0) = \begin{pmatrix} M(\lambda_1) & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & M(\lambda_2) & \dots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \dots & M(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

donde  $M(\lambda_k) = \lambda_k I + R_{r_k}(1)$ ,  $\forall k = 1, \dots, s$ . (Aquí  $I \in \mathbb{C}^{r_k \times r_k}$  es la matriz identidad y  $R_{r_k}(1) \in \mathbb{C}^{r_k \times r_k}$  es la matriz triangular superior de orden uno).

**Demostración.**

1.)  $\Rightarrow$  2.) En la carta  $z = (z_1, \dots, z_n)$  anterior,  $\mathcal{F}_Z$  esta generado por

el campo vectorial  $Z = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k \geq 1} Z_k^i \right) \frac{\partial}{\partial z_i}$ . Por (6.2) y (6.3) tenemos que:

$$(6.5) \quad \begin{cases} Z_1^i(z) = \lambda_l z_i + \epsilon_{i-t_{l-1}}^{(l)} z_{i+1}, & t_{l-1} + 1 \leq i \leq t_l - 1, & 1 \leq l \leq s \\ Z_1^{t_l}(z) = \lambda_l z_{t_l}, & 1 \leq l \leq s \end{cases}$$

en donde  $t_0 = 0$  y  $t_l = \sum_{k=1}^l r_k$ ,  $1 \leq l \leq s$ .

Procediendo por contradicción, suponga que existe  $i_0 \in \{1, \dots, r_1 - 1\}$  tal que  $\epsilon_{i_0}^{(1)} = 0$ . En la carta  $y_1 = z_1$ ,  $y_i = \frac{z_i}{z_1}$  ( $2 \leq i \leq n$ ), tenemos que:

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}(0, y_2, \dots, y_n) &= \sum_{i=2}^n [Z_1^i(\hat{y}) - y_i Z_1^1(\hat{y})] \frac{\partial}{\partial y_i} \\
&= \sum_{i=2}^{r_1-1} [Z_1^i(\hat{y}) - y_i Z_1^1(\hat{y})] \frac{\partial}{\partial y_i} + \\
&\quad + [Z_1^{r_1}(\hat{y}) - y_{r_1} Z_1^1(\hat{y})] \frac{\partial}{\partial y_{r_1}} + \\
&\quad + \sum_{l=2}^s \left\{ \sum_{i=t_{l-1}+1}^{t_l-1} [Z_1^i(\hat{y}) - y_i Z_1^1(\hat{y})] \frac{\partial}{\partial y_i} + \right. \\
&\quad \left. + [Z_1^{t_l}(\hat{y}) - y_{t_l} Z_1^1(\hat{y})] \frac{\partial}{\partial y_{t_l}} \right\}
\end{aligned}$$

donde  $\hat{y} = (1, y_2, \dots, y_n)$ . De (6.5):

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}(0, y_2, \dots, y_n) &= \sum_{i=2}^{r_1-1} [\epsilon_i^{(1)} y_{i+1} - \epsilon_1^{(1)} y_2 y_i] \frac{\partial}{\partial y_i} - \\
&\quad - [\epsilon_1^{(1)} y_2 y_{r_1}] \frac{\partial}{\partial y_{r_1}} + \\
&\quad + \sum_{l=2}^s \sum_{i=t_{l-1}+1}^{t_l-1} [(\lambda_l - \lambda_1 - \epsilon_1^{(1)} y_2) y_i + \\
&\quad + \epsilon_{i-t_{l-1}}^{(l)} y_{i+1}] \frac{\partial}{\partial y_i} + \\
&\quad + \sum_{l=2}^s [\lambda_l - \lambda_1 - \epsilon_1^{(1)} y_2] y_{t_l} \frac{\partial}{\partial y_{t_l}}
\end{aligned}$$

Se sigue que  $\tilde{Z}(0, \dots, 0, y_{i_0+1}, 0, \dots, 0) = 0$ , por lo tanto  $Sing(\tilde{F}_Z)$  es un conjunto infinito, lo cual es una contradicción. Concluimos que  $\epsilon_i^{(1)} = 1, \forall 1 \leq i \leq r_1 - 1$  y por tanto  $M_1 = M(\lambda_1) = \lambda_1 I + R_{r_1}(1)$ .

Para probar que  $M_l = M(\lambda_l) = \lambda_l I + R_{r_l}(1)$ , ( $l = 2, \dots, s$ ), se considera la carta  $y_j = z_j$ ,  $y_i = \frac{z_i}{z_j}$  ( $i = 1, \dots, n, i \neq j$ ) donde  $j = t_{l-1} + 1$  y procedemos como antes.

2.)  $\Rightarrow$  1.) Por hipótesis y (6.5), tenemos que:

$$(6.6) \quad \begin{cases} Z_1^i(z) = \lambda_l z_i + z_{i+1}, & t_{l-1} + 1 \leq i \leq t_l - 1, & 1 \leq l \leq s \\ Z_1^{t_l}(z) = \lambda_l z_{t_l}, & 1 \leq l \leq s \end{cases}$$

En la carta  $y_1 = z_1, y_i = \frac{z_i}{z_1}$  ( $2 \leq i \leq n$ ), de (6.6) obtenemos:

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \tilde{Z}(0, y_2, \dots, y_n) &= \sum_{i=2}^{r_1-1} [y_{i+1} - y_2 y_i] \frac{\partial}{\partial y_i} - y_2 y_{r_1} \frac{\partial}{\partial y_{r_1}} + \\ &+ \sum_{l=2}^s \left\{ \sum_{i=t_{l-1}+1}^{t_l-1} [(\lambda_l - \lambda_1 - y_2) y_i + y_{i+1}] \frac{\partial}{\partial y_i} + \right. \\ &\left. [\lambda_l - \lambda_1 - y_2] y_{t_l} \frac{\partial}{\partial y_{t_l}} \right\} \end{aligned}$$

Se sigue que  $(0, \dots, 0)$  es la única singularidad de  $\tilde{F}_Z$  en esta carta. Ahora, para  $i_0 \in \{2, \dots, r_1 - 1\}$  (resp.  $i_0 = r_1$ ), consideramos la carta  $y_{i_0} = z_{i_0}, y_i = \frac{z_i}{z_{i_0}}, 1 \leq i \leq n, i \neq i_0$  (resp.  $y_{r_1} = z_{r_1}, y_i = \frac{z_i}{z_{r_1}}, 1 \leq i \leq n, i \neq r_1$ ).

Denotando

$$y_0 = (y_1, \dots, y_{i_0-1}, 0, y_{i_0+1}, \dots, y_n)$$

y

$$\hat{y} = (y_1, \dots, y_{i_0-1}, 1, y_{i_0+1}, \dots, y_n)$$

respectivamente

$$y_0 = (y_1, \dots, y_{r_1-1}, 0, y_{r_1+1}, \dots, y_n)$$

y

$$\hat{y} = (y_1, \dots, y_{r_1-1}, 1, y_{r_1+1}, \dots, y_n),$$

de (2.6) y (6.7), tenemos que:

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}(y_0) &= \sum_{i=1, i \neq i_0}^n \left[ Z_1^i(\hat{y}) - y_i Z_1^{i_0}(\hat{y}) \right] \frac{\partial}{\partial y_i} \\
&= \sum_{i=1, i \neq i_0-1}^{r_1-1} [y_{i+1} - y_i y_{i_0+1}] \frac{\partial}{\partial y_i} + \\
(6.8) \quad &+ [1 - y_{i_0-1} y_{i_0+1}] \frac{\partial}{\partial y_{i_0-1}} - y_{i_0+1} y_{r_1} \frac{\partial}{\partial y_{r_1}} + \\
&+ \sum_{l=2}^s \left\{ \sum_{i=t_{l-1}+1}^{t_l-1} [(\lambda_l - \lambda_1 - y_{i_0+1}) y_i + y_{i+1}] \frac{\partial}{\partial y_i} + \right. \\
&\left. + [\lambda_l - \lambda_1 - y_{i_0+1}] y_{t_l} \frac{\partial}{\partial y_{t_l}} \right\}
\end{aligned}$$

respectivamente

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}(y_0) &= \sum_{i=1, i \neq r_1}^n [Z_1^i(\hat{y}) - y_i Z_1^{r_1}(\hat{y})] \frac{\partial}{\partial y_i} \\
(6.9) \quad &= \sum_{i=1, i \neq r_1}^{r_1-1} y_{i+1} \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial y_{r_1-1}} + \\
&+ \sum_{l=2}^s \sum_{i=t_{l-1}+1}^{t_l-1} [(\lambda_l - \lambda_1) y_i + y_{i+1}] \frac{\partial}{\partial y_i} + \\
&+ \sum_{l=2}^s [\lambda_l - \lambda_1] y_{t_l} \frac{\partial}{\partial y_{t_l}}
\end{aligned}$$

De (6.8) y (6.9), se sigue que  $\tilde{\mathcal{F}}_Z$  no tiene singularidades en estas cartas.

De manera similar, podemos probar que  $Sing(\tilde{\mathcal{F}}_Z) = \{\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_s\}$  donde  $\tilde{p}_l$  es el cero de la carta  $y_j = z_j$ ,  $y_i = \frac{z_i}{z_j}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ ,  $1 \leq l \leq s$  y  $j = t_{l-1} + 1$ . Esto finaliza la prueba de la Proposición 2.  $\square$

**Observación:** Los puntos  $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_s$  anteriores son singularidades no dicríticas de  $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ .

Ahora, consideremos la parte lineal de  $\tilde{Z}$  en cada punto singular no dicrítico  $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_s$ . En la carta  $y_1 = z_1, y_i = \frac{z_i}{z_1}$  ( $2 \leq i \leq n$ ), no es difícil ver que:

$$(6.10) \quad D\tilde{Z}(0) = \begin{pmatrix} M_1 & \Theta & \dots & \Theta \\ P_1 & M(\lambda_2 - \lambda_1) & \dots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_{s-1} & \Theta & \dots & M(\lambda_s - \lambda_1) \end{pmatrix}$$

donde  $M_1 \in \mathbb{C}^{r_1 \times r_1}$ ,  $M(\lambda_l - \lambda_1) \in \mathbb{C}^{r_l \times r_l}$  y  $P_{l-1} \in \mathbb{C}^{r_l \times r_1}$  ( $l = 2, \dots, s$ ) están definidas como:

$$(6.11) \quad M_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{r_1-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_{r_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{l-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{t_{l-1}+1} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{t_{l-1}+2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{t_l} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

y  $M(\lambda_l - \lambda_1) = (\lambda_l - \lambda_1)I + R_{r_l}(1)$ . (Aquí  $\alpha_i = Z_2^i(1, 0, \dots, 0)$ ,  $2 \leq i \leq n$ .)

Nótese que tenemos tres posibilidades para el polinomio característico  $\tilde{\Delta}(t)$  de la matriz  $\tilde{M} = D\tilde{Z}(0)$ :

a) Si  $\lambda_1 = 0$  entonces

$$(6.12) \quad \tilde{\Delta}(t) = t^{r_1} \prod_{l=2}^s (t - \lambda_l)^{r_l}$$

b) Si  $\lambda_l \neq 2\lambda_1, \forall l = 2, \dots, s$ ; entonces

$$(6.13) \quad \tilde{\Delta}(t) = t^{r_1-1} (t - \lambda_1) \prod_{l=2}^s (t - \lambda_l + \lambda_1)^{r_l}$$

c) Si existe  $l_0 \in \{2, \dots, s\}$  tal que  $\lambda_{l_0} = 2\lambda_1$  entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $l_0 = 2$  y luego

$$(6.14) \quad \tilde{\Delta}(t) = t^{r_1-1} (t - \lambda_1)^{r_2+1} \prod_{l=3}^s (t - \lambda_l + \lambda_1)^{r_l}$$

Ahora, si suponemos que  $\tilde{p}_1$  es tal que  $Sing(\mathcal{F}_Z^{(2)})$  es un conjunto finito, donde  $\mathcal{F}_Z^{(2)} = E_2^* \tilde{\mathcal{F}}_Z$  y  $E_2$  es el blowing-up centrado en  $\tilde{p}_1$ , entonces  $\tilde{M}$  es una matriz del tipo (6.4). Más específicamente, si denotamos:

$$(6.15) \quad [\lambda_1, \dots, \lambda_s; r_1, \dots, r_s] = \begin{pmatrix} M(\lambda_1) & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & M(\lambda_2) & \dots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \dots & M(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

entonces tenemos la siguiente:

**PROPOSICIÓN 3.** *Sea  $\tilde{p}_1 \in Sing(\mathcal{F}_Z)$  tal que  $Sing(\mathcal{F}_Z^{(2)})$  es un conjunto finito, entonces*

(1) *Si  $\lambda_1 = 0$  entonces*

$$\tilde{M} = [0, \lambda_2, \dots, \lambda_s; r_1, r_2, \dots, r_s].$$

(2) *Si  $\lambda_1 \neq 0$  y  $\lambda_l \neq 2\lambda_1$  entonces*

$$\tilde{M} = [0, \lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1, \dots, \lambda_s - \lambda_1; r_1 - 1, 1, r_2, \dots, r_s].$$

(3) *Si  $\lambda_1 \neq 0$  y  $\lambda_2 = 2\lambda_1$  entonces*

$$\tilde{M} = [0, \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_1, \dots, \lambda_s - \lambda_1; r_1 - 1, r_2 + 1, r_3, \dots, r_s].$$

**Demostración.** Por hipótesis y de la Proposición 2, el polinomio minimal  $\tilde{m}(t)$  de  $\tilde{M}$  es  $\tilde{m}(t) = \tilde{\Delta}(t)$ . Ahora, considerando los casos a), b) y c) anteriores, la prueba se sigue.  $\square$

**Observación:** Un resultado similar es obtenido para los otros puntos singulares  $\tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_s \in Sing(\mathcal{F}_Z)$

Por lo tanto, podemos asegurar que si  $p \in \mathcal{M}^n$  es un punto singular no dicrítico e irreducible de la foliación  $\mathcal{F}_Z$  tal que  $p$  es una S.A.A., entonces no aparecen puntos dicríticos en el proceso de blowing-up.

En efecto, por la Proposición 2, cualquier punto de  $Sing(\mathcal{F}_Z)$  es un punto singular no dicrítico y por la Proposición 3, la parte lineal de  $\tilde{Z}$  es una matriz similar a la parte lineal de  $Z$ . Luego, la prueba se sigue por inducción.

En [9], los autores estudian formas finales de una singularidad absolutamente aislada no dicrítica. Recordemos que ellos definen una *singularidad simple* o *singularidad irreducible* de la manera siguiente: Sea  $\mathcal{M}^n$  una variedad compleja  $n$ -dimensional y sea  $D \subseteq \mathcal{M}^n$  un divisor de  $\mathcal{M}^n$  con cruzamiento normal (podemos imaginar que estamos en la etapa 0 del proceso de desingularización, siendo  $D$  todo el divisor excepcional). Sea  $\mathcal{F}$  una foliación analítica singular por curvas de  $\mathcal{M}^n$  tal que cada componente irreducible de  $D$  es invariante para  $\mathcal{F}$ . Fijemos un punto  $p \in Sing(\mathcal{F})$  y denotemos por  $e = e(D, p)$  al número de componentes irreducibles de  $D$  que pasan por  $p$ . Asumimos que  $e \geq 1$  (esta condición es siempre satisfecha después de un blowing-up). Bajo estas condiciones, la foliación  $\mathcal{F}$  es general por el campo vectorial

$$(6.16) \quad Z = \sum_{i=1}^e Z_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i=e+1}^n Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

donde  $D = (\prod_{i=1}^e z_i = 0)$  localmente en  $p$ . Tenemos entonces la siguiente:

**DEFINICIÓN 2.** *Sea  $e = 1$ . Entonces  $p$  es un punto simple o punto irreducible de  $\mathcal{F}$  si y sólo si ocurre una de las siguientes posibilidades:*

- (1) *Si  $Z_1(0) = 0$  entonces la curva  $(z_2 = 0, \dots, z_n = 0)$  es invariante por  $\mathcal{F}$  (salvo una adecuada elección de las coordenadas  $(z_1, \dots, z_n)$ ) y la parte lineal de  $\mathcal{F}|_D$  es una matriz de rango  $n - 1$ .*
- (2) *Si  $Z_1(0) = \lambda \neq 0$  entonces la multiplicidad del autovalor  $\lambda$  es uno y si  $\mu$  es otro autovalor de la parte lineal de  $Z$ , entonces  $\frac{\mu}{\lambda} \notin \mathbb{Q}^+$ .*

*Si asumimos que  $e \geq 2$ , entonces  $p$  es una esquina simple o punto irreducible de  $\mathcal{F}$  si y sólo si (salvo un reordenamiento de  $(z_1, \dots, z_e)$ ), se tiene que  $Z_1(0) = \lambda \neq 0$ ,  $Z_2(0) = \mu$  y  $\frac{\mu}{\lambda} \notin \mathbb{Q}^+$ .*

Decimos que  $p$  es una singularidad simple o singularidad irreducible de  $\mathcal{F}$  si y sólo si es un punto simple o una esquina simple.

Con la definición anterior, obtenemos el siguiente resultado de desingularización:

**Teorema A'.** Podemos extender la sucesión de blowing-ups del Teorema A anterior

$$\mathcal{M}_0^n \xleftarrow{E_1} \mathcal{M}_1^n \xleftarrow{E_2} \dots \xleftarrow{E_M} \mathcal{M}_M^n, \quad M \geq N$$

de tal manera que  $q \in \text{Sing}(\mathcal{F}_M) \implies q$  es una singularidad simple de  $\mathcal{F}_M$ .

Si  $p \in \mathcal{M}^n$  es un punto singular no dicrítico e irreducible de la foliación  $\mathcal{F}_Z$  tal que  $p$  es una S.A.A., entonces  $p$  es una singularidad absolutamente aislada no dicrítica de la foliación  $\mathcal{F}_Z$  y podemos aplicar el Teorema A'.