3. EL NÚMERO DE MILNOR DE UNA SINGULARIDAD AISLADA DICRÍTICA EN DIMENSIÓN 3

Sea $\mathcal{O}_{n,p}$ al anillo de gérmenes de las funciones analíticas en $p \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ y sea $I[Z_1, Z_2, \ldots, Z_n] \subseteq \mathcal{O}_{n,p}$ el ideal generado por las componentes del campo vectorial holomorfo Z definido en U. El *Número de Milnor* del campo Z en el punto p, denotado por $\mu_p(Z)$, es definido como

$$\mu_p(Z) = dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathcal{O}_{n,p}}{I[Z_1, Z_2, \ldots, Z_n]} \right) \tag{3.1}$$

Este número satisface las siguientes propiedades (ver [16]):

(1) $\mu_p(Z)$ es finito si y sólo si p es una singularidad aislada de Z.
(2) $\mu_p(Z) = 0$ si y sólo si p es un punto regular de Z.
(3) $\mu_p(Z) = 1$ si y sólo si $det \left(\dfrac{\partial Z_i(p)}{\partial z_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0$.

El número de Milnor puede ser geométricamente interpretado como el índice de intersección $i_p(Z_1, \ldots, Z_n)$ en p de las n hipersuperficies analíticas generadas por las componentes de Z (ver [16]):

$$\mu_p(Z) = i_p(Z_1, \ldots, Z_n) \tag{3.2}$$

Sean $p \in U$ una singularidad aislada del campo vectorial Z, tal que $\mu_p(Z) = \nu$, $\mathcal{F}_Z$ la foliación generada por Z, $\tilde{\mathcal{F}_Z}$ el transformado estricto de $\mathcal{F}_Z$ y $\tilde{Z}$ el campo vectorial holomorfo que genera a la foliación $\tilde{\mathcal{F}_Z}$. Cuando $n = 2$, existe una fórmula que relaciona ν con el número de Milnor de Z en p y el número de Milnor de las singularidades de $\tilde{Z}$ (ver [19]):

$$\mu_p(Z) = \begin{cases} \nu^2 - \nu - 1 + \sum\limits_{q \in E^{-1}(p)} \mu_q(\tilde{Z}), & \text{si } p \text{ es no dicrítico.} \\ \nu^2 + \nu - 1 + \sum\limits_{q \in E^{-1}(p)} \mu_q(\tilde{Z}), & \text{si } p \text{ es dicrítico.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Observe que como el conjunto $Sing\left(\tilde{\mathcal{F}_Z}\right)$ es finito, las sumatorias que aparecen en la expresión anterior son finitas. Existe una generalización n-dimensional de la fórmula anterior bajo las hipótesis de que p es una singularidad aislada no dicrítica de Z y que el conjunto $Sing\left(\tilde{\mathcal{F}}_Z\right)$ sea finito (ver [9]):

$$(3.4) \qquad \mu_p(Z) = \nu^n - \nu^{n-1} - \ldots - \nu - 1 + \sum_{q \in E^{-1}(p)} \mu_q(\tilde{Z})$$

Esta sección está dedicada a probar una fórmula análoga a la anterior, en dimensión 3, para el caso en que p es una singularidad aislada dicrítica de un campo vectorial holomorfo Z y el conjunto $Sing\left(\tilde{\mathcal{F}}_Z\right)$ sea finito. Antes de probar esta fórmula, necesitamos ver algunas definiciones y propiedades previas.

Denotemos por $\mathcal{O}_n$ al anillo de gérmenes de las funciones analíticas en $0 \in \mathbb{C}^n$, luego cualquier $F \in \mathcal{O}_n$ tiene un desarrollo en series de potencias, definido en una vecindad del origen:

$$F(z) = \sum_{k \geq 0} F_k(z)$$

en donde los $F_k(z)$ son polinomios homogéneos de grado $k \geq 0$. En estas condiciones, el *orden* de F en 0, denotado por $ord_0(F)$, es definido como el menor número entero no negativo m tal que $F_k \equiv 0$ para todo $k < m$ y $F_m \not\equiv 0$.

Es bien conocido que el subconjunto de $\mathbb{C}^n$ formado por todos los ceros de F, al que denotaremos por $(F = 0)$, i.e.

$$(F = 0) = \{z \in \mathbb{C}^n : F(z) = 0\}$$

es una *hipersuperficie analítica* de $\mathbb{C}^n$, es decir, una subvariedad analítica de $\mathbb{C}^n$ de codimensión 1 (o de dimensión $n-1$). Por ejemplo si $n = 2$, $(F = 0)$ es una curva analítica en $\mathbb{C}^2$ mientras que si $n = 3$, $(F = 0)$ es una superficie analítica en $\mathbb{C}^3$. En el caso particular de que F es un polinomio, el conjunto $(F = 0)$ es una *hipersuperficie algebraica* de $\mathbb{C}^n$.

Sean $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{O}_n$ y denotemos $A_j = (F_j = 0)$, $(1 \leq j \leq n)$. Vamos a suponer que $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ es un conjunto de dimensión cero (conjunto discreto de $\mathbb{C}^n$). El producto cartesiano $\Pi A_j = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ en $\mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \ldots \times \mathbb{C}^n$ tiene dimensión $n(n-1)$, y la diagonal $\Delta = \left\{(z_1, z_2, \ldots, z_{n^2}) \in \mathbb{C}^{n^2} : z_1 = z_2 = \ldots = z_{n^2}\right\}$ tiene dimensión complementaria n. Si $a \in \bigcap_{j=1}^{n} A_j$ entonces $(a)^n = (a, a, \ldots, a) \in \mathbb{C}^{n^2}$ es un punto aislado de $(\Pi A_j) \cap \Delta$, se sigue que la proyección $\pi_\Delta|_{\Pi A_j}$ de Δ sobre $\Delta^\perp$ (en $\mathbb{C}^{n^2}$) es un recubrimiento analítico de alguna vecindad de $(a)^n$. El *índice de intersección* de las hipersuperficies analíticas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ en el punto $a \in \bigcap_{j=1}^{n} A_j$, denotado por $i_a(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, es definido como la *multiplicidad* (ver [13]) de la proyección $\pi_\Delta|_{\Pi A_j}$ en $(a)^n \in \mathbb{C}^{n^2}$:

$$i_a(F_1, F_2, \ldots, F_n) = \mu_{(a)^n}\left(\pi_\Delta|_{\Pi A_j}\right).$$

Si $a \notin \bigcap_{j=1}^{n} A_j$, es conveniente definir $i_a(F_1, F_2, \ldots, F_n) = 0$.

Como consecuencia directa de la definición, tenemos que el índice de intersección es una función simétrica de las funciones $F_1, F_2, \ldots, F_n$, i.e.

$$i_a(F_{j_1}, F_{j_2}, \ldots, F_{j_n}) = i_a(F_1, F_2, \ldots, F_n),$$

para cualquier permutación $(1, 2, \ldots, n) \to (j_1, j_2, \ldots, j_n)$.

Otras propiedades fundamentales del índice de intersección son las siguientes:

(1) $i_a(F_1 \cdot F_1', F_2, \ldots, F_n) = i_a(F_1, F_2, \ldots, F_n) + i_a(F_1', F_2, \ldots, F_n)$

(2) Si A es una matriz cuadrada $n \times n$ inversible, cuyos elementos son funciones holomorfas en una vecindad de $a \in \mathbb{C}^n$ y si denotamos:

$$\begin{pmatrix} F_1' \\ F_2' \\ \vdots \\ F_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

entonces $i_a(F_1', F_2', \ldots, F_n') = i_a(F_1, F_2, \ldots, F_n)$

El lector puede encontrar la demostración de estas y otras propiedades del índice de intersección en [13] y [15].

La interpretación geométrica del índice de intersección es la siguiente: Dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, las ϵ-perturbaciones $A_j(\epsilon) = (F_j = \epsilon)$ de A_j se interceptan en exactamente $i_a(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ puntos, i.e.

$$card\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j(\epsilon)\right) = i_a(F_1, F_2, \ldots, F_n).$$

En estas condiciones, el número de Milnor del campo vectorial holomorfo $Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$, puede ser interpretado geométricamente como el *índice de intersección* $i_p(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ en p de las n hipersuperficies analíticas generadas por las componentes de Z (ver [13]):

$$\mu_p(Z) = i_p(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$$

Sea E el blow-up centrado en 0, en la carta $\tilde{U}_j$ $(1 \leq j \leq n)$ de $\tilde{\mathbb{C}}^n$ introducimos las coordenadas $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. De esta manera $E : \tilde{U}_j \to \mathbb{C}^n$ tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} E(y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (y_1 y_j, \ldots, y_{j-1} y_j, y_{j+1} y_j, \ldots, y_n y_j) \\ &= (z_1, \ldots, z_n) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dado $F \in \mathcal{O}_n$, con $ord_0(F) = m$, en la carta $\tilde{U}_j$ definimos el *transformado estricto* de F por E, denotado por $\tilde{F}$, como:

$$\tilde{F}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{(F \circ E)(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{y_j^m} \tag{3.6}$$

El Teorema siguiente, cuya demostración puede ser encontrada en [15], es fundamental para demostrar el resultado principal del presente trabajo:

TEOREMA 1. *Sean $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{O}_n$ tales que:*

(1) *$0 \in \mathbb{C}^n$ es un punto de intersección aislado de las hipersuperficies analíticas $(F_1 = 0), (F_2 = 0), \ldots, (F_n = 0)$.*

(2) *Las hipersuperficies $\left(\tilde{F}_1 = 0\right), \left(\tilde{F}_2 = 0\right), \ldots, \left(\tilde{F}_n = 0\right)$ tienen*
puntos de intersecciones aislados en el divisor $E^{-1}(0)$.

Entonces

$$i_0(F_1, F_2, \ldots, F_n) = ord_0(F_1)ord_0(F_2)\ldots ord_0(F_n) + $$

$$+ \sum_{q \in E^{-1}(p)} i_q\left(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \ldots, \tilde{F}_n\right).$$

Sea $\mathcal{M}^3$ una variedad analítica compleja de dimensión 3 y consideremos en ella una foliación analítica singular por curvas. En $p \in \mathcal{M}^3$ singularidad aislada dicrítica de la foliación, consideremos un sistema de coordenadas locales (z_1, z_2, z_3) tal que $p = 0 \in \mathbb{C}^3$. En esta carta, la foliación es generada por el campo vectorial holomorfo $Z = \sum_{i=1}^{3} Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$. Si $m_0(Z) = \nu$, por la Proposición 1, existe un polinomio homogéneo $P_{\nu-1}$ de grado $\nu - 1$, tal que:

$$(3.7) \quad Z_i(z_1, z_2, z_3) = z_i P_{\nu-1}(z_1, z_2, z_3) + \sum_{k \geq \nu+1} Z_i^k(z_1, z_2, z_3),$$

donde $1 \leq i \leq 3$.

Sea (x, t, s) la carta de $\tilde{\mathbb{C}}^3$ en la cual el blow-up E centrado en el $0 \in \mathbb{C}^3$ es expresado como:

$$(3.8) \qquad E(x, t, s) = (x, xt, xs) = (z_1, z_2, z_3).$$

En estas coordenadas, las componentes del campo

$$(3.9) \qquad \tilde{Z} = \tilde{Z}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{Z}_2 \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{Z}_3 \frac{\partial}{\partial s}$$

que genera a la foliación transformada estricta, se expresan como:

$$(3.10) \quad \left| \begin{array}{rcl} \tilde{Z}_1(x, t, s) & = & P_{\nu-1}(1, t, s) + \sum_{k \geq \nu+1} x^{k-\nu} Z_k^1(1, t, s) \\ \\ \tilde{Z}_2(x, t, s) & = & \sum_{k \geq \nu+1} x^{k-\nu-1} \left[Z_k^2(x, t, s) - tZ_k^1(1, t, s)\right] \\ \\ \tilde{Z}_3(x, t, s) & = & \sum_{k \geq \nu+1} x^{k-\nu-1} \left[Z_k^3(x, t, s) - sZ_k^1(1, t, s)\right] \end{array} \right.$$

Las componentes de $\tilde{Z}$ tienen expresiones análogas en las otras dos cartas (u, y, v) y (r, w, z) de $\tilde{\mathbb{C}}^3$, en las cuales E se escribe:

$$(3.11) \qquad \left| \begin{array}{lllll} E(u,y,v) & = & (uy, y, vy) & = & (z_1, z_2, z_3) \\ E(r,w,z) & = & (rz, wz, z) & = & (z_1, z_2, z_3) \end{array} \right.$$

Observe que las componentes de $\tilde{Z}$ también pueden ser expresadas en términos de los transformados estrictos de las componentes de Z. En efecto, por ejemplo en la carta (x, t, s), un fácil cálculo nos muestra que:

$$(3.12) \qquad \tilde{Z} \;=\; \tilde{Z}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1}{x} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x} \frac{\partial}{\partial s}$$

Con las definiciones y notaciones anteriores, podemos demostrar el siguiente resultado:

TEOREMA 2. **[Caso 3-dimensional]** *Sea Z un campo vectorial holomorfo con singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}^3$, tal que $\tilde{Z}$ tiene singularidades aisladas en el divisor. Si $0 \in \mathbb{C}^3$ es una singularidad dicrítica de Z y $m_0(Z) = \nu$, entonces*

$$\mu_0(Z) = \nu^3 + 2\nu^2 - 2 + \sum_{q \in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z})$$

Demostración. Desde que $\tilde{Z}$ tiene singularidades aisladas, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que las siguientes condiciones son satisfechas:

(1) La carta (x, t, s) de $\tilde{\mathbb{C}}^3$ contiene todas las singularidades de $\tilde{Z}$.
(2) $Z^1_{\nu+1}(0,0,1) \neq 0$ y $P_{\nu-1}(0,1,0) \neq 0$.
(3) $P_{\nu-1}(0, z_2, z_3)$ y $Z^1_{\nu+1}(0, z_2, z_3)$ son polinomios coprimos.

Usando las propiedades del número de Milnor y del índice de intersección, tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{q\in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z}) &= \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \frac{\tilde{Z}_2 - t\tilde{Z}_1}{x}, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) \\
&= \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) - \\
&\quad - \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, x, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

donde (2.1) es válida siempre que la sumatoria:
$\sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, x, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right)$ sea finita. Con el objetivo de probar esta finitud, observamos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, x, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) = \sum_{p\in\mathbb{C}^2} i_p\left(P_{\nu-1}(1,t,s), Z^3_{\nu+1}(x,t,s)\right) - \\
- \left(sZ^1_{\nu+1}(1,t,s)\right)\Big)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Sea $H_{\nu+2}$ el polinomio homogéneo de grado $\nu+2$ definido por:

$$H_{\nu+2}(z_1,z_2,z_3) = z_1 Z^3_{\nu+1}(z_1,z_2,z_3) - z_3 Z^1_{\nu+1}(z_1,z_2,z_3)$$

la condición 3 implica que $H_{\nu+2}$ y $P_{\nu-1}$ no tienen factores comunes, luego por el Teorema de Bezout:

$$\sum_{p\in\mathbb{C}^2} i_p\left(P_{\nu-1}, H_{\nu+2}\right) = (\nu-1)(\nu+2) \tag{3.15}$$

De las condiciones 2 y 3, tenemos que los polinomios $P_{\nu-1}(0,1,v)$ y $H_{\nu+2}(0,1,v) = -vZ^1_{\nu+1}(0,1,v)$ no tienen raíces comunes, además $H_{\nu+2}(0,0,1) = -Z^1_{\nu+1}(0,0,1) \neq 0$. Por lo tanto, las curvas algebraicas $(P_{\nu-1}=0)$ y $(H_{\nu+2}=0)$ no tienen puntos de intersección en la recta del infinito $L_\infty = \mathbb{C}P(2) - \mathbb{C}^2$, esto significa que el plano afín $\mathbb{C}^2$ contiene a todos los puntos de intersección de estas curvas. De (3.14) y (3.15), tenemos:

$$\sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, x, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) = \sum_{p\in\mathbb{C}^2} i_p\left(P_{\nu-1}(1,t,s), H_{\nu+2}(1,t,s)\right)$$
$$= \sum_{p\in\mathbb{C}^2} i_p\left(P_{\nu-1}, H_{\nu+2}\right) = (\nu-1)(\nu+2)$$

Por lo tanto se verifica la igualdad (3.13) y tenemos

$$\sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) = (\nu-1)(\nu+2) + \sum_{q\in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z}) \tag{3.16}$$

Calculemos ahora la sumatoria $\sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right)$. Sea H la función analítica:

$$\begin{aligned} H(z_1,z_2,z_3) &= z_1 Z_3(z_1,z_2,z_3) - z_3 Z_1(z_1,z_2,z_3) \\ &= \sum_{k\geq \nu+1} \left(z_1 Z_k^3(z_1,z_2,z_3) - z_3 Z_k^1(z_1,z_2,z_3)\right) \end{aligned}$$

De la condición 3, se sigue fácilmente que $0\in\mathbb{C}^3$ es un punto de intersección aislado de las superficies analíticas $(Z_1=0)$, $(Z_2=0)$ y $(H=0)$. Por propiedades del índice de intersección, tenemos:

$$\begin{aligned} i_0(Z_1,Z_2,H) &= i_0(Z_1,Z_2,z_1Z_3) \\ &= i_0(Z_1,Z_2,z_1) + i_0(Z_1,Z_2,Z_3) \\ &= i_0(Z_1,Z_2,z_1) + \mu_0(Z) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Del Teorema 1, tenemos:

$$\begin{aligned} i_0(Z_1,Z_2,z_1) &= i_0\left(\sum_{k\geq\nu+1} Z_k^1, Z_2, z_1\right) \\ &= \nu(\nu+1) + \sum_{q\in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}', \tilde{Z}_2, \tilde{\pi}_1\right) \end{aligned} \tag{3.18}$$

en donde $\tilde{Z}' = \sum_{k \geq \nu+1} Z_k^1$ y $\pi_1(z_1, z_2, z_3) = z_1$. Desde que $\tilde{\pi}_1(z_1, z_2, z_3) = 1$, las superficies $\left(\tilde{Z}' = 0\right)$, $\left(\tilde{Z}_2 = 0\right)$ y $(\tilde{\pi}_1 = 0)$ no tienen puntos de intersección en la carta (x, t, s). En las otras dos cartas (u, y, w) y (r, w, z), los puntos de intersección de estas superficies que se encuentran en el divisor, vienen dados por las soluciones de los sistemas:

$$\left| \begin{array}{lcl} \tilde{Z}'(u, 0, v) & = & Z_{\nu+1}(u, 1, v) = 0 \\ \tilde{Z}_2(u, 0, v) & = & P_{\nu-1}(u, 1, v) = 0 \\ \tilde{\pi}_1(u, 0, v) & = & u = 0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{lcl} \tilde{Z}'(r, w, 0) & = & Z_{\nu+1}(r, w, 1) = 0 \\ \tilde{Z}_2(r, w, 0) & = & wP_{\nu-1}(r, w, 1) = 0 \\ \tilde{\pi}_1(r, w, 0) & = & r = 0 \end{array} \right.$$

pero de las condiciones 2 y 3, deducimos que los dos sistemas anteriores no tienen solución, luego (6.1) implica que

$$i_0\left(Z_1, Z_2, z_1\right) = \nu(\nu + 1) \tag{3.19}$$

Usando nuevamente el Teorema 1, tenemos:

$$i_0\left(Z_1, Z_2, H\right) = \nu^2(\nu + 2) + \sum_{q \in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \tilde{H}\right) \tag{3.20}$$

siempre que las superficies $\left(\tilde{Z}_1 = 0\right)$, $\left(\tilde{Z}_2 = 0\right)$ y $\left(\tilde{H} = 0\right)$ se intersecten en puntos aislados del divisor. En la carta (x, t, s) esto se cumple (ver (3.2)) y en las otras dos cartas (u, y, v) y (r, w, z) estos puntos de intersección (los cuales no pertenecen a la carta (x, t, s)), son soluciones de los sistemas:

$$\left| \begin{array}{lcl} \tilde{Z}_1(0, 0, v) & = & 0 \\ \tilde{Z}_2(0, 0, v) & = & P_{\nu-1}(0, 1, v) = 0 \\ \tilde{H}(0, 0, v) & = & -vZ_{\nu+1}(0, 1, v) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{lcl} \tilde{Z}_1(0, w, 0) & = & 0 \\ \tilde{Z}_2(0, w, 0) & = & wP_{\nu-1}(0, w, 1) = 0 \\ \tilde{H}(0, 0, v) & = & -Z_{\nu+1}(0, w, 1) = 0 \end{array} \right.$$

Nuevamente, por las condiciones 2 y 3, los sistemas anteriores no admiten solución. Se sigue de (6.3) que:

$$(3.21)\quad i_0\left(Z_1, Z_2, H\right) = \nu^2(\nu+2) + \sum_{q \in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right)$$

Finalmente, de (3), (7), (5) y (2), tenemos:

$$\begin{aligned}
\mu_0(Z) &= i_0\left(Z_1, Z_2, H\right) - i_0\left(Z_1, Z_2, z_1\right) \\
&= \nu^2(\nu+2) + \sum_{q \in E^{-1}(0)} i_q\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \frac{\tilde{Z}_3 - s\tilde{Z}_1}{x}\right) - \nu(\nu+1) \\
&= \nu^2(\nu+2) - \nu(\nu+1) + (\nu-1)(\nu+2) + \sum_{q \in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z}) \\
&= \nu^3 + 2\nu^2 - 2 + \sum_{q \in E^{-1}(0)} \mu_q(\tilde{Z})
\end{aligned}$$

lo cual prueba el Teorema 2. □

Observaciones:

(1) La técnica usada para la demostración del Teorema 2, es una extensión a dimensión 3 de la utilizada en [6] para probar el resultado análogo para singularidades dicríticas aisladas en $\mathbb{C}^2$.

(2) En la sección 5, extenderemos la fórmula del Teorema 2 con la finalidad de probar un resultado de desingularización para el caso de singularidades absolutamente aisladas.