

7. EL ÍNDICE DE INTERSECCIÓN. INVARIANZA TOPOLÓGICA

Sea $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}_0^n$ generado por el campo vectorial holomorfo Z , sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la singularidad aislada dicrítica es el $0 \in \mathbb{C}^n$. Sabemos que cualquier punto $\tilde{p} \in E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$ es un punto regular de la foliación $\tilde{\mathcal{F}}_Z$. Sea \tilde{L} la hoja de $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ que pasa por \tilde{p} . Desde que $E^{-1}(0)$ y \tilde{L} son subvariedades analíticas de \mathbb{C}^n de dimensiones complementarias (ver [13]) y $\tilde{p} \in E^{-1}(0) \cap \tilde{L}$, podemos definir el *índice de intersección* $i_{\tilde{p}}(E^{-1}(0), \tilde{L})$ de la hoja \tilde{L} con el espacio proyectivo $E^{-1}(0)$ en el punto \tilde{p} . En efecto, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que \tilde{p} está en la carta de blow-up en donde E se expresa como:

$$E(y_1, \dots, y_n) = (y_1 y_n, \dots, y_{n-1} y_n, y_n) = (z_1, \dots, z_n)$$

Desde que $\tilde{p} = (y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, 0)$ es un punto regular, la hoja \tilde{L} puede ser localmente parametrizada por una función analítica

$$\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n) : (\mathbb{D}_\epsilon, 0) \rightarrow (\tilde{L}, \tilde{p})$$

donde $\mathbb{D}_\epsilon = \{T \in \mathbb{C} : |T| < \epsilon\}$, tal que

$$(7.1) \quad \begin{cases} \tilde{\alpha}'(T) = \tilde{Z}(\tilde{\alpha}(T)), & \forall T \in \mathbb{D}_\epsilon \\ \tilde{\alpha}(0) = \tilde{p}. \end{cases}$$

Desde que $E^{-1}(0) = \{y_n = 0\}$, podemos definir:

$$(7.2) \quad i_{\tilde{p}}(E^{-1}(0), \tilde{L}) = \text{ord}_0(\tilde{\alpha}_n)$$

es decir, $i_{\tilde{p}}(E^{-1}(0), \tilde{L}) = m \iff \tilde{\alpha}_n(T) = T^m \tilde{\epsilon}_n(T)$ donde $\tilde{\epsilon}$ es una función analítica y $\tilde{\epsilon}_n(0) \neq 0$. Es claro que $i_{\tilde{p}}(E^{-1}(0), \tilde{L}) \geq 1, \forall \tilde{p} \in E^{-1}(0)$.

El índice de intersección puede ser geoméricamente interpretado como el número de puntos de intersección de \tilde{L} con una pequeña traslación del espacio proyectivo $\{y_n = \delta\}$, con $\delta \neq 0$. Para mayor información sobre las propiedades del índice de intersección entre subvariedades analíticas de dimensiones complementarias, el lector debe consultar [13].

Observe que si $\tilde{p} \in E^{-1}(0)$ entonces $\tilde{\alpha}'_n(0) = P_{\nu-1}(y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, 1)$ entonces concluimos que $i_{\tilde{p}}(E^{-1}(0), \tilde{L}) = 1$ si y sólo si $\tilde{p} \in E^{-1}(0) - S$ si y sólo si \tilde{L} es transversal a $E^{-1}(0)$ en \tilde{p} .

En esta sección, nuestro objetivo es probar que el índice de intersección es un invariante topológico. La principal herramienta para probar este resultado es el uso de la invarianza topológica de la multiplicidad de un campo vectorial a lo largo de una subvariedad analítica invariante. Las pruebas de los resultados dados en esta sección, el lector las puede encontrar en [10].

Sea Z un germen en $0 \in \mathbb{C}^n$ de un campo vectorial holomorfo y L un germen en $0 \in \mathbb{C}^n$ de una subvariedad analítica irreducible invariante por Z y de $\dim_{\mathbb{C}} L = 1$. Si B es una bola suficientemente pequeña centrada en $0 \in \mathbb{C}^n$ tal que $B \cap L$ es conexo, entonces $B \cap L$ es homeomorfo a un disco bidimensional $\mathbb{D}_\epsilon = \{T \in \mathbb{C} : |T| < \epsilon\}$. Tal homeomorfismo puede ser realizado, por ejemplo, mediante una parametrización de Puiseux $\alpha : (\mathbb{D}_\epsilon, 0) \rightarrow (B \cap L, 0)$, de $B \cap L$, donde $\alpha(T) = (\alpha_1(T), \dots, \alpha_n(T))$, $\alpha_j(T) = T^{m_j} \varepsilon_j(T)$ con $\varepsilon_j(0) \neq 0$ o $\varepsilon_j = 0$ y $m_j \in \mathbb{Z}^+$, $\forall 1 \leq j \leq n$.

Bajo estas condiciones, $Z|_{B \cap L}$ puede ser considerado como un germen de un campo vectorial real con singularidad aislada, luego su índice en $0 \in \mathbb{C}^n$ está bien definido.

DEFINICIÓN 3. Sean Z , L y B como antes. Definimos la Multiplicidad de Z a lo largo de L en 0 , $m_0(Z, L)$ como el índice de $Z|_{B \cap L}$ en $0 \in \mathbb{C}^n$, considerado como un campo vectorial real en $B \cap L$.

La siguiente proposición establece que el número $m_0(Z, L)$ puede ser calculado en términos de una parametrización de Puiseux α de L :

PROPOSICIÓN 4. Con las notaciones anteriores, existe un único campo vectorial holomorfo X en \mathbb{D}_ϵ con $X(0) = 0$ tal que:

$$Z(\alpha(T)) = X(T)\alpha'(T), \quad \forall T \in \mathbb{D}_\epsilon$$

Además, si $X(T) = T^m \beta(T) \frac{\partial}{\partial T}$ ($m \in \mathbb{Z}^+$), con $\beta(0) \neq 0$, entonces

$$m_0(Z, L) = m.$$

DEFINICIÓN 4. Sean \mathcal{F}_Z y $\mathcal{F}_{Z'}$ dos gérmenes de foliaciones en $0 \in \mathbb{C}^n$. Decimos que \mathcal{F}_Z y $\mathcal{F}_{Z'}$ son topológicamente equivalentes, lo cual será denotado por $\mathcal{F}_Z \sim_{top} \mathcal{F}_{Z'}$ (o simplemente por $Z \sim_{top} Z'$) si y sólo si existe h germen de homeomorfismo en $0 \in \mathbb{C}^n$ tal que $h^*(\mathcal{F}_{Z'}) = \mathcal{F}_Z$. Es decir, $L \in \mathcal{F}_Z \implies h[L] \in \mathcal{F}_{Z'}$. h es llamado conjugación topológica.

Sean \mathcal{F}_Z y $\mathcal{F}_{Z'}$ dos gérmenes de foliaciones con singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}^n$, tales que $\mathcal{F}_Z \sim_{top} \mathcal{F}_{Z'}$ por un homeomorfismo $h : U \rightarrow U'$ donde U y U' son vecindades abiertas del 0. Sea L una subvariedad analítica, irreducible, invariante por Z con singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}^n$ y $\dim_{\mathbb{C}} L = 1$. Podemos suponer que $L \cap U$ es conexa. Bajo estas condiciones, se sigue que $L - \{0\}$ es una hoja de \mathcal{F}_Z y por el teorema de Remmert-Stein (ver [17]), tenemos que $L' = h[L]$ es una subvariedad analítica, irreducible, invariante por Z' con $\dim_{\mathbb{C}} L' = 1$. Por lo tanto, $m_0(Z', L')$ está bien definido. Tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 3. La multiplicidad de Z a lo largo de V es un invariante topológico. Más específicamente, sean L y L' como antes. Si $\mathcal{F}_Z \sim_{top} \mathcal{F}_{Z'}$ entonces $m_0(Z, L) = m_0(Z', L')$.

Retornando a las foliaciones dicríticas, probaremos que existe una relación entre el índice de intersección y la multiplicidad a lo largo de una subvariedad invariante. En efecto, sea $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}_0^n$, con $m_0(\mathcal{F}_Z) = \nu$ y $\tilde{p} \in E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\tilde{p} = (y_1^0, \dots, y_{n-1}^0)$. Sea \tilde{U} vecindad de \tilde{p} tal que $\tilde{L}|_{\tilde{U}} \cap E^{-1}(0) = \{\tilde{p}\}$, donde \tilde{L} es la hoja de $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ que pasa por \tilde{p} . Si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño, entonces $\tilde{L}|_{\tilde{U}}$ puede ser parametrizado por la función analítica

$$\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n) : (\mathbb{D}_\epsilon, 0) \rightarrow (\tilde{l}, \tilde{p})$$

la cual satisface

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}'(T) = \tilde{Z}(\tilde{\alpha}(T)), & \forall T \in \mathbb{D}_\epsilon \\ \tilde{\alpha}(0) = \tilde{p}. \end{cases}$$

Si $\tilde{\alpha}_n(T) = T^m \tilde{\epsilon}_n(T)$ con $\tilde{\epsilon}_n(0) \neq 0$ y $m \in \mathbb{Z}^+$, se sigue de la definición de índice de intersección que $i_{\tilde{p}}(E^{-1}(0), \tilde{L}) = m$. Sea U

vecindad de $0 \in \mathbb{C}^n$ tal que $E^{-1}[U - \{0\}] \subseteq \tilde{U}$ y $E \left[\tilde{L}|_{\tilde{U}} - \{\tilde{p}\} \right] = L - \{0\}$. Entonces L es una subvariedad analítica, irreducible de U , invariante por Z , con singularidad aislada en 0 y $\dim_{\mathbb{C}} L = 1$. Definimos $\alpha : (\mathbb{D}_\epsilon, 0) \rightarrow (L, 0)$ como:

$$\alpha(T) = \begin{cases} E\tilde{\alpha}(T) = \tilde{Z}(\tilde{\alpha}(T)), & T \neq 0 \\ 0, & T = 0 \end{cases}$$

se sigue que α es una parametrización de Puiseux de L . Desde que $\tilde{Z} = \frac{E^*Z}{y_n^\nu}$ (ver [1]), tenemos que:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'(T) &= \tilde{Z}(\tilde{\alpha}(T)) = \frac{DE^{-1} \circ E(\tilde{\alpha}(T))Z \circ E(\tilde{\alpha}(T))}{\tilde{\alpha}_n(T)^\nu} \\ &= \frac{DE^{-1}(\alpha(T))Z(\alpha(T))}{\tilde{\alpha}_n(T)^\nu} = \frac{X(T)}{\tilde{\alpha}_n(T)^\nu} (E^{-1} \circ \alpha)'(T) \\ &= \frac{X(T)}{\tilde{\alpha}_n(T)^\nu} \alpha'(T) \end{aligned}$$

donde X es el campo vectorial holomorfo de la Proposición 1 y $T \in \mathbb{D}_\epsilon - \{0\}$.

Concluimos que $X(T) = \tilde{\alpha}_n(T)^\nu = T^{m\nu} \beta(T)^\nu$, con $\beta(0) \neq 0$. De esta manera, hemos demostrado el siguiente:

LEMA 3. Si $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}_0^n$, $\tilde{p} \in E^{-1}(0)$, L y \tilde{L} como antes. En las condiciones mencionadas, tenemos que

$$m_0(Z, L) = m_0(Z)|_{i_{\tilde{p}}(E^{-1}(0), \tilde{L})}.$$

Ahora podemos probar que la multiplicidad algebraica de una foliación en \mathcal{D}_0^n , y el índice de intersección son invariantes topológicos. En efecto, sean \mathcal{F}_Z y $\mathcal{F}_{Z'}$ dos elementos de \mathcal{D}_0^n tales que $\mathcal{F}_Z \sim_{top} \mathcal{F}_{Z'}$ por un germen de homeomorfismo h . Sea $\tilde{p} \in E^{-1}(0) - S$, donde S es la hipersuperficie de tangencia de \mathcal{F}_Z , desde que \tilde{L} , la hoja de $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ que pasa por \tilde{p} , es transversal al espacio proyectivo $E^{-1}(0)$, tenemos que $i_{\tilde{p}}(E^{-1}(0), \tilde{L}) = 1$. Consideremos \tilde{U} vecindad de \tilde{p} tal que $\tilde{L}|_{\tilde{U}} \cap E^{-1}(0) = \{\tilde{p}\}$ y U vecindad de $0 \in \mathbb{C}^n$ tal que $E^{-1}[U - \{0\}] \subseteq \tilde{U}$.

Si $L = \overline{E \left[\tilde{L}|_{\tilde{U}} - \{\tilde{p}\} \right]}$ entonces $L - \{0\}$ es una hoja de \mathcal{F}_Z y L

es una subvariedad analítica, irreducible de U , invariante por Z y $\dim_{\mathbb{C}} L = 1$.

De la definición de h , se sigue que $h[L - \{0\}]$ es una hoja de $\mathcal{F}_{Z'}$. Sea $U' = h[U]$ y $L' = \overline{h[L - \{0\}]}$, se sigue del teorema de Remmert-Stein que L' es una subvariedad analítica, irreducible de U' , con singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}^n$ y $\dim_{\mathbb{C}} L' = 1$. Desde que $L' - \{0\} \in \mathcal{F}_{Z'}$ entonces $E^{-1}[U - \{0\}] \in \mathcal{F}_{Z'}$. Por lo tanto $\tilde{L}' = \overline{E^{-1}[U - \{0\}]}$ está contenido en una hoja de $\tilde{\mathcal{F}}_{Z'}$ y $\tilde{L}' \cap E^{-1}(0) = \{p'\}$.

Bajo estas condiciones, del Lema anterior tenemos que $m_0(Z, L) = m_0(Z)$ y de la invarianza topológica de la multiplicidad a lo largo de L' (Proposición 2), se sigue que:

$$m_0(Z) = m_0(Z', L') = m_0(Z') i_{\tilde{p}'}(E^{-1}(0), \tilde{L}')$$

Por lo tanto $m_0(Z)$ es divisible por $m_0(Z')$. Análogamente, si $\tilde{q}' \in E^{-1}(0) - S'$, donde S' es la hipersuperficie de tangencia de $\tilde{\mathcal{F}}_{Z'}$, tenemos que $m_0(Z')$ es divisible por $m_0(Z)$ y por lo tanto $m_0(Z) = m_0(Z')$.

Más aún, si $\tilde{p} \in E^{-1}(0) \cap S$, de la Proposición 2 y del Lema anterior, tenemos que:

$$i_{\tilde{p}}(E^{-1}(0), \tilde{L}) = \frac{m_0(Z, L)}{m_0(Z)} = \frac{m_0(Z', L')}{m_0(Z')} = i_{\tilde{p}'}(E^{-1}(0), \tilde{L}').$$

De esta manera, hemos demostrado el siguiente resultado:

TEOREMA B. *La multiplicidad algebraica de una foliación de \mathcal{D}_0^n y el índice de intersección, son invariantes topológicos. Más específicamente, sean $\mathcal{F}_Z, \mathcal{F}_{Z'} \in \mathcal{D}_0^n$, $\tilde{p}, \tilde{p}', \tilde{L}$ y \tilde{L}' como antes. Si $\mathcal{F}_Z \sim_{\text{top}} \mathcal{F}_{Z'}$ entonces*

- (1) $m_0(Z) = m_0(Z')$
- (2) $i_{\tilde{p}}(E^{-1}(0), \tilde{L}) = i_{\tilde{p}'}(E^{-1}(0), \tilde{L}')$.

Nótese que, de la construcción anterior, podemos definir la función $\tilde{f} : E^{-1}(0) \rightarrow E^{-1}(0)$ por la regla de correspondencia:

$$(7.3) \quad \tilde{f}(\tilde{p}) = \tilde{p}'$$

Desde que h es un germen de homeomorfismo en $0 \in \mathbb{C}^n$, usando h^{-1} es fácil demostrar que \tilde{f} es biyectiva. Más aún, tenemos el siguiente:

TEOREMA 4. *La función \tilde{f} definida por (7.3) es un homeomorfismo tal que $\tilde{f}[S] = S'$, donde S y S' son las hipersuperficies de tangencia de las foliaciones \mathcal{F}_Z y $\mathcal{F}_{Z'}$, respectivamente.*

Demostración. Desde que \tilde{f} es una función biyectiva, es suficiente probar que \tilde{f} es continua. Primeramente, probaremos que \tilde{f} es continua sobre $E^{-1}(0) - S$ y luego extendemos \tilde{f} a una función continua sobre $E^{-1}(0)$.

Sea $\tilde{p} \in E^{-1}(0) - S$, de la definición de \tilde{f} y la parte 2.) del Teorema B, deducimos que $\tilde{f}(\tilde{p}) = \tilde{p}' \in E^{-1}(0) - S'$. Sea $\{\tilde{p}_n\}$ una sucesión en $E^{-1}(0)$ tal que $\tilde{p}_n \rightarrow \tilde{p}$, probaremos que $\tilde{f}(\tilde{p}_n) \rightarrow \tilde{f}(\tilde{p}) = \tilde{p}'$. Desde que \tilde{p} y \tilde{p}' son puntos regulares de $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ y $\tilde{\mathcal{F}}_{Z'}$, respectivamente, por el Teorema del flujo tubular complejo, existen $\alpha, \alpha' > 0$; $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$, $\tilde{V}' \subseteq \tilde{U}'$ vecindades de \tilde{p} y \tilde{p}' (respectivamente) y difeomorfismos holomorfos ψ y ψ' , donde:

$$\psi : \mathbb{D}_\alpha \times B_\alpha \longrightarrow \tilde{V}, \quad \psi' : \mathbb{D}_{\alpha'} \times B_{\alpha'} \longrightarrow \tilde{V}', \quad B_\alpha = \{u \in \mathbb{C}^{n-1} : |u| < \alpha\}$$

son tales que $\psi(0, \bar{0}) = \tilde{p}$, $\psi'(0, \bar{0}) = \tilde{p}'$ y ψ (resp. ψ') es una conjugación analítica local entre \tilde{Z} (resp. \tilde{Z}') y el campo vectorial constante $\frac{\partial}{\partial t}$, donde $\frac{\partial}{\partial t}(T, u) = (1, \bar{0})$. Más aún, tenemos que $\psi^{-1}[E^{-1}(0) \cap \tilde{V}] = \{0\} \times B_\alpha$ (resp. $\psi'^{-1}[E^{-1}(0) \cap \tilde{V}'] = \{0\} \times B_{\alpha'}$). Si h es una conjugación topológica entre \mathcal{F}_Z and $\mathcal{F}_{Z'}$, se sigue que $\tilde{h} = E^{-1} \circ h \circ E$ es una conjugación topológica entre $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ y $\tilde{\mathcal{F}}_{Z'}$ sobre $\tilde{V} - E^{-1}(0)$, donde \tilde{V} es una vecindad de $E^{-1}(0)$. Por lo tanto:

$$\tilde{h}|_{\tilde{V}} : \tilde{V} - E^{-1}(0) \longrightarrow \tilde{V}' - E^{-1}(0)$$

es un homeomorfismo y $\tilde{f} = \tilde{h}|_{\tilde{V} \cap E^{-1}(0)}$.

Definiendo $\tilde{H} = (\psi')^{-1} \circ \tilde{h} \circ \psi$ y $\tilde{F} = (\psi')^{-1} \circ \tilde{f} \circ \psi$, se sigue que $\tilde{H} : \mathbb{D}_\alpha \times B_\alpha \longrightarrow \mathbb{D}_{\alpha'} \times B_{\alpha'}$ y $\tilde{F} : \{0\} \times B_\alpha \longrightarrow \{0\} \times B_{\alpha'}$ tenemos las siguientes propiedades:

- \tilde{H} es continua en $\mathbb{D}_\alpha - \{0\} \times B_\alpha$.
- $\tilde{H}(T, u) = (\tilde{H}_1(T, u), \tilde{H}_2(u))$.
- $\tilde{H}(0, \bar{0}) = (0, \bar{0})$.
- $\tilde{H}_1(0, u) = 0, \forall u \in B_\alpha$.
- $\tilde{H}|_{\{0\} \times B_\alpha} = \tilde{F}$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la sucesión, $\{\tilde{p}_n\}$ está contenida en $\tilde{V} \cap E^{-1}(0)$, luego $z_n = \psi^{-1}(\tilde{p}_n)$, es una sucesión de la forma $z_n = (0, u_n)$ con $u_n \in B_\alpha$ y $u_n \rightarrow \bar{0}$. Si $T_0 \in \mathbb{D}_\alpha - \{0\}$ entonces $(T_0, u_n) \rightarrow (T_0, \bar{0})$ y por la continuidad de $\tilde{H} : \tilde{H}(T_0, u_n) \rightarrow \tilde{H}(T_0, \bar{0})$, tenemos $\tilde{H}_2(u_n) \rightarrow \tilde{H}_2(\bar{0}) = \bar{0}$. Se sigue que:

$$\tilde{F}(z_n) = \tilde{F}(0, u_n) = \tilde{H}(0, u_n) = (0, \tilde{H}_2(u_n)) \rightarrow (0, \bar{0}) = \tilde{F}(0, \bar{0}).$$

De esta forma, \tilde{f} es continua sobre $E^{-1}(0) - S$. Con la finalidad de extender \tilde{f} continuamente a $E^{-1}(0)$, usamos el criterio de Cauchy: Sea $\tilde{p} \in S$, debemos probar que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in E^{-1}(0) - S$ con $|\tilde{p}_1 - \tilde{p}| < \delta$ y $|\tilde{p}_2 - \tilde{p}| < \delta \implies |\tilde{f}(\tilde{p}_1) - \tilde{f}(\tilde{p}_2)| < \epsilon$.

Para $\tilde{p} \in S$ y $\tilde{p}' = \tilde{f}(\tilde{p}) \in S'$ sea $\alpha, \alpha' > 0, \tilde{V}, \tilde{V}', \psi$ y ψ' como antes, tomando α y α' suficientemente pequeños tales que:

$$\tilde{V}' \cap E^{-1}(0) \subseteq \{\tilde{q}' \in E^{-1}(0) : |\tilde{q}' - \tilde{f}(\tilde{p})| < \epsilon\}$$

y considerando $\delta > 0$ tal que $\{\tilde{q} \in E^{-1}(0) : |\tilde{q} - \tilde{p}| < \delta\} \subseteq \tilde{V} \cap E^{-1}(0)$, la hipótesis del criterio de Cauchy se verifica. Esto finaliza la demostración del Teorema 4. \square

Observación: Cuando $n = 3$, podemos probar la parte 1.) del Teorema B, (es decir, $m_0(Z) = m_0(\tilde{Z})$) usando el Teorema 2. En efecto, sean \mathcal{F}_Z y $\mathcal{F}_{Z'}$ elementos de \mathcal{D}_0^3 con multiplicidades algebraicas $m_0(Z) = \nu$ y $m_0(Z') = \nu'$ tales que $\mathcal{F}_Z \sim_{\text{top}} \mathcal{F}_{Z'}$. Por el Teorema 2:

$$(7.4) \mu_0(Z) = \nu^3 + 2\nu^2 - 2 \quad \text{y} \quad \mu_0(Z') = (\nu')^3 + 2(\nu')^2 - 2$$

Por otro lado, de la invarianza topológica del número de Milnor (ver [10]): $\mu_0(Z) = \mu_0(Z')$. Por lo tanto, de (7.4) tenemos que:

$$\nu^3 + 2\nu^2 = (\nu')^3 + 2(\nu')^2$$

es equivalente a:

$$(7.5) \quad (\nu - \nu')(\nu(\nu + 2) + \nu\nu' + \nu'(\nu' + 2)) = 0$$

ahora, desde que $\nu, \nu' > 0$; el segundo factor de (7.5) es mayor que 0. Por lo tanto $\nu = \nu'$.