

9. INVARIANTES TOPOLÓGICOS DE LAS FOLIACIONES DE \mathcal{D}_0^3

Sea $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}_0^3$ generada por $Z = \sum_{i=1}^3 Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ con $Z_i = \sum_{k \geq \nu} Z_k^i$,

($1 \leq i \leq 3$) donde los Z_k^i son polinomios homogéneos de grado k , $Z_\nu^i = z_i P_{\nu-1}$ y $m_0(Z) = \nu$. En este caso, la hipersuperficie de tangencia S es una curva algebraica en $\mathbb{C}P(2)$ definida por $S = \{[z_1; z_2; z_3] \in \mathbb{C}P(2) : P_{\nu-1}(z_1, z_2, z_3) = 0\}$. Usando las notaciones de la sección 8, si $P_{\nu-1}$ es un polinomio no irreducible, entonces puede ser factorizado por

$$P_{\nu-1} = F_1^{r_1} \cdots F_l^{r_l}$$

y

$$S = r_1 S_1 + \cdots + r_l S_l$$

donde $S_j = \{[z_1; z_2; z_3] \in \mathbb{C}P(2) : F_j(z_1, z_2, z_3) = 0\}$, ($1 \leq j \leq l$) son las componentes irreducibles de S . Usaremos las siguientes notaciones:

$\#(S) = l =$ número de componentes irreducibles de S .

$r(S) = \{r_1, \dots, r_l\}$, donde r_j es la multiplicidad de S_j ,
 $\forall 1 \leq j \leq l$.

$g(S) = \{g_1, \dots, g_l\}$, donde g_j es el grado de S_j , $\forall 1 \leq j \leq l$.

Para cada componente irreducible S_j de S , asociaremos la curva algebraica:

$$S_j^* = \{[z_1; z_2; z_3] \in \mathbb{C}P(2) : G_j(z_1, z_2, z_3) = 0\}, \quad (1 \leq j \leq l)$$

donde G_j es el polinomio homogéneo de grado $g_j + \nu$ definido por

$$G_j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_j}{\partial z_i} Z_{\nu+1}^i.$$

Es claro que los puntos singulares de la curva S_j están contenidos en S_j^* , de la Proposición 5 se sigue que, si $\tilde{p} \in S_j \cap S_j^*$ entonces $i_{\tilde{p}}(E^{-1}(0), \tilde{L}) > r_j + 1$ donde \tilde{L} es la hoja de $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ que pasa por \tilde{p} . Una

propiedad importante de las curvas S_j y S_j^* es que ellas no tienen componentes comunes. Más aún, tenemos la siguiente:

PROPOSICIÓN 6. *En las condiciones anteriores, tenemos que para todo $1 \leq j \leq l$, $S_j \cap S_j^*$ es un conjunto finito que tiene $g_j(g_j + \nu)$ elementos.*

Demostración. Procediendo por contradicción, suponga que S_j y S_j^* tienen una componente en común. Desde que S_j es irreducible, tenemos que:

$$(9.1) \quad G_j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_j}{\partial z_i} Z_{\nu+1}^i = F_j Q$$

donde Q es un polinomio homogéneo de grado ν . Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones homogéneas:

$$(9.2) \quad \begin{cases} P_{\nu-1}(z) = 0 \\ z_2 Z_{\nu+1}^1(z) - z_1 Z_{\nu+1}^2(z) = 0 \\ z_3 Z_{\nu+1}^1(z) - z_1 Z_{\nu+1}^3(z) = 0 \\ z_3 Z_{\nu+1}^2(z) - z_2 Z_{\nu+1}^3(z) = 0 \end{cases}$$

Sea $z_0 = (z_1^0, z_2^0, z_3^0)$ un punto de \mathbb{C}^3 tal que $F_j(z_0) = 0$ y $z_2^0 Z_{\nu+1}^1(z_0) - z_1^0 Z_{\nu+1}^2(z_0) = 0$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que z_0 es un punto regular de F_j , más aún, $\frac{\partial F_j}{\partial z_3}(z_0) \neq 0$. De la expresión (9.1) y la fórmula de Euler, no es difícil probar que:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_j}{\partial z_3}(z_0) (z_3^0 Z_{\nu+1}^1(z_0) - z_1^0 Z_{\nu+1}^3(z_0)) = \\ & = -\frac{\partial F_j}{\partial z_2}(z_0) (z_2^0 Z_{\nu+1}^1(z_0) - z_1^0 Z_{\nu+1}^2(z_0)) = 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_j}{\partial z_3}(z_0) (z_3^0 Z_{\nu+1}^2(z_0) - z_2^0 Z_{\nu+1}^3(z_0)) = \\ & = \frac{\partial F_j}{\partial z_1}(z_0) (z_2^0 Z_{\nu+1}^1(z_0) - z_1^0 Z_{\nu+1}^2(z_0)) = 0 \end{aligned}$$

De este modo $z_0 \neq 0 \in \mathbb{C}^3$ es una solución de (9.2), pero del corolario de la Proposición 1, se sigue que $\mathcal{F}_Z \notin \mathcal{D}_0^3$ lo cual es una

contradicción. De esta manera, la Proposición 6 se sigue del Teorema de Bezout. \square

Consideremos \mathcal{F}_Z y $\mathcal{F}_{Z'}$ $\in \mathcal{D}_0^3$ tales que $\mathcal{F}_Z \sim_{top} \mathcal{F}_{Z'}$. Por la parte 1.) del Teorema B, tenemos que $m_0(Z) = m_0(Z') = \nu$. Sea S (resp. S') la curva de tangencia de \mathcal{F}_Z (resp. $\mathcal{F}_{Z'}$ definido por el polinomio homogéneo $P_{\nu-1}$ (resp. $P'_{\nu-1}$) el cual es factorizado como $P_{\nu-1} = F_1^{r_1} \dots F_l^{r_l}$ (resp. $P'_{\nu-1} = (F'_1)^{r'_1} \dots (F'_l)^{r'_l}$) donde $deg(F_j) = g_j$, $1 \leq j \leq l$ (resp. $deg(F'_j) = g'_j$, $1 \leq j \leq l'$). Entonces $S = r_1 S_1 + \dots + r_l S_l$ (resp. $S' = r'_1 S'_1 + \dots + r'_l S'_l$.) Tenemos la siguiente generalización del Teorema I.2 de [18], para el caso 3-dimensional:

TEOREMA C. Consideremos \mathcal{F}_Z y $\mathcal{F}_{Z'} \in \mathcal{D}_0^3$. Con las notaciones anteriores, si $\mathcal{F}_Z \sim_{top} \mathcal{F}_{Z'}$ entonces

- (1) $\#(S) = \#(S')$.
- (2) $r(S) = r(S')$.
- (3) $g(S) = g(S')$.

En donde $\#(S)$ es el número de elementos del conjunto S .

Demostración. Desde que $\mathcal{F}_Z \sim_{top} \mathcal{F}_{Z'}$, del Teorema 4, existe un homeomorfismo $\tilde{f} : E^{-1}(0) \rightarrow E^{-1}(0)$ ($E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(2)$) tal que $\tilde{f}[S] = S'$. Primero, consideremos el caso cuando S es irreducible. Afirmamos que S' también es irreducible. En efecto, suponiendo por contradicción que $S' = S'_1 \cup S'_2$, del Teorema de Bezout se sigue que $S'_1 \cap S'_2$ consiste de un número finito de puntos $\{\tilde{p}'_1, \dots, \tilde{p}'_N\}$ ($N = deg(S'_1) \cdot deg(S'_2)$). Denotemos $\tilde{p}_j = \tilde{f}^{-1}(\tilde{p}'_j)$, $1 \leq j \leq N$ y consideremos $\hat{S} = S - \{\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_N\}$ y $\hat{S}' = S' - \{\tilde{p}'_1, \dots, \tilde{p}'_N\}$ con la topología inducida de $\mathbb{C}P(2)$. Bajo estas condiciones, tenemos que $\tilde{f}|_{\hat{S}} : \hat{S} \rightarrow \hat{S}'$ es un homeomorfismo entre espacios topológicos, donde \hat{S} es conexo pero \hat{S}' no lo es, lo cual es una contradicción. Para el caso general, aplicamos el argumento anterior a cada componente irreducible S_j de S . Concluimos que S y S' tienen igual número de componentes irreducibles, es decir $\#(S) = \#(S')$, lo cual prueba la parte 1).

Denotemos $f[S_j] = S'_j$, $\forall 1 \leq j \leq l$. Desde que $S_j \cap S'_j$ es finito $\forall \mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}_0^3$, (ver Proposición 6), podemos elegir un punto $\tilde{p} \in S_j - \left(S'_j \cup \left(\bigcup_{i=1, i \neq j}^l S_i \right) \right)$ tal que $\tilde{p}' = \tilde{f}(\tilde{p}) \in S'_j -$

$\left((S'_j)^* \cup \left(\bigcup_{i=1, i \neq j}^l S'_i \right) \right)$. Sea \tilde{L} (resp. \tilde{L}') la hoja de $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ (resp. $\tilde{\mathcal{F}}_{Z'}$) que pasa por \tilde{p} (resp. \tilde{p}'). De la parte 2.) del Teorema B y la Proposición 5, tenemos que:

$$r_j + 1 = i_{\tilde{p}}(E^{-1}(0), \tilde{L}) = i_{\tilde{p}'}(E^{-1}(0), \tilde{L}') = r'_j + 1$$

entonces $r_j = r'_j$; $\forall 1 \leq j \leq l$. Por lo tanto $r(S) = r(S')$, lo cual prueba la parte 2).

Finalmente, desde que tenemos un homeomorfismo de $\mathbb{C}P(2)$ en $\mathbb{C}P(2)$ tal que S es homeomórficamente mapeado en S' , de las técnicas usadas en [4], podemos probar que $g_j = g'_j$, $\forall 1 \leq j \leq l$. Esto finaliza la prueba del Teorema C. \square