1. INTRODUCCIÓN

En el presente estudio, resolvemos el problema de desingularización para una singularidad absolutamente aislada de un campo vectorial holomorfo definido en una variedad compleja n-dimensional. Además, proporcionamos algunos invariantes topológicos de foliaciones analíticas por curvas definidas en una variedad compleja n-dimensional y que presentan una singularidad dicrítica aislada en la que su transformado estricto no tiene singularidades. A continuación, damos los enunciados precisos de estos resultados.

Sea $\mathcal{M}^n$ una variedad analítica compleja de dimensión n y consideremos en ella una foliación analítica singular por curvas. Esto significa que en cualquier punto $p \in \mathcal{M}^n$ la foliación es generada por el campo vectorial holomorfo

$$(1.1) \qquad Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \; Z_1, Z_2, \ldots, Z_n \in \mathcal{O}_{n,p}$$

y *m.c.d.* $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) = 1$, en donde $\mathcal{O}_{n,p}$ es el anillo de gérmenes de las funciones analíticas en p. En lo sucesivo, denotaremos por $\mathcal{F}_Z$ a esta foliación, diremos que el campo Z *genera* la foliación $\mathcal{F}_Z$ y las funciones Z_i serán llamadas *componentes* o *coordenadas* de Z. El lector interesado en conocer detalles de la teoría de funciones analíticas de varias complejas, deberá consultar [17] y para los que deseen profundizar en la teoría de las variedades analíticas complejas, recomendamos [22]. Sea $p \in \mathcal{M}^n$ y consideremos una carta (U, ϕ) de $\mathcal{M}^n$ alrededor del punto p tal que $\phi(p) = 0 \in \mathbb{C}^n$, claramente $Z_i \circ \phi^{-1}$ es una función analítica de varias variables complejas definida en una vecindad del origen y por lo tanto, ella tiene un desarrollo en series de potencias

$$Z_i \circ \phi^{-1} = \sum_{k \geq 0} Z_i^k, \quad 1 \leq i \leq n$$

donde los Z_i^k son polinomios homogéneos de grado k en n variables complejas. El *orden* de $Z_i \circ \phi^{-1}$ en el $0 \in \mathbb{C}^n$ es, por definición, el menor número entero ν_i tal que $Z_i^k \equiv 0$, para todo $k < \nu_i$ y $A_i^{\nu_i} \not\equiv 0$. No es difícil probar que el número ν_i es independiente de la elección de la carta (U, ϕ), por esta razón el entero ν_i es llamado el *orden* de Z_i en p y lo denotamos por $ord_p(Z_i)$. La *multiplicidad algebraica* de la foliación $\mathcal{F}_Z$ (o del campo Z) en el punto $p \in \mathcal{M}^n$, denotada por $m_p(\mathcal{F}_Z)$ (o simplemente por $m_p(Z)$), es definida como el mínimo de los órdenes $ord_p(Z_i)$. Un punto $p \in \mathcal{M}^n$ es llamado *punto singular* de la foliación $\mathcal{F}_Z$ (o del campo Z) si y sólo si $m_p(Z) \geq 1$, en caso contrario decimos que p es un *punto regular*. El conjunto de todos los puntos singulares de la foliación $\mathcal{F}_Z$ será denotado por $Sing(\mathcal{F}_Z)$. Un punto $p \in \mathcal{M}^n$ es llamado *singularidad aislada* de Z si y sólo si $p \in Sing(\mathcal{F}_Z)$ y existe una vecindad abierta $U \subseteq \mathcal{M}^n$ de p tal que todos los elementos de $U - \{p\}$ son puntos regulares de Z.

Un punto $p \in \mathcal{M}^n$ es llamado *irreducible* si y sólo si $m_p(Z) = 1$ y la parte lineal de Z en p (i. e. $DZ(p)$) tiene al menos un autovalor no nulo.

Sea $E : \tilde{\mathcal{M}}^n \to \mathcal{M}^n$ el blow-up centrado en el punto $p \in Sing(\mathcal{F}_Z)$. Entonces existe una única manera de extender $E^*(\mathcal{F}_Z - \{p\})$ a una foliación analítica singular $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ sobre una vecindad del espacio proyectivo $\mathbb{C}P(n-1) = E^{-1}(p) \subset \tilde{\mathcal{M}}^n$, con conjunto singular de codimensión mayor o igual que 2. En este caso decimos que $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ es el *transformado estricto* de $\mathcal{F}_Z$ por E. El lector interesado en mayores detalles sobre el tema, puede consultar las referencias [16], [19], [2] y [12].

Decimos que p es una *singularidad no dicrítica* de $\mathcal{F}_Z$ si y sólo si $E^{-1}(p)$ es invariante por $\tilde{\mathcal{F}}_Z$, es decir, $E^{-1}(p)$ es unión de hojas y singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}_Z$. En caso contrario, p es llamado *singularidad dicrítica*. El conjunto de las foliaciones analíticas por curvas sobre $\mathcal{M}^n$ con una singularidad dicrítica aislada, será denotado por $\mathcal{D}^n$.

El problema de desingularización para una singularidad $p \in \mathcal{M}^n$ (dicrítica o no) de $\mathcal{F}_Z$ consiste en demostrar la existencia de un mapeo holomorfo propio $\phi : \tilde{\mathcal{M}}^* \to \mathcal{M}^n$ definido en una variedad compleja n-dimensional $\tilde{\mathcal{M}}^*$ tal que:

(1) $\phi^{-1}(p) = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ donde las D_i son subvariedades complejas, compactas, de codimensión 1 de $\tilde{\mathcal{M}}^*$ con cruzamientos normales.

(2) La foliación pull-back $\phi^*\left(\mathcal{F}_Z\big|_{\mathcal{M}^n-\{p\}}\right)$ se extiende a una foliación singular de $\tilde{\mathcal{M}}^*$ con conjunto singular de codimensión mayor o igual que 2 y tal que todos sus puntos singulares son irreducibles.

Una primera etapa para resolver el problema de desingularización es asumir que la codimensión del conjunto singular de la foliación pull-back es n. Esto motiva la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1. *Sea $\mathcal{F}_Z$ una foliación analítica por curvas sobre una variedad compleja n-dimensional $\mathcal{M}^n$. Decimos que $p \in Sing(\mathcal{F}_Z)$ es una* Singularidad Absolutamente Aislada *(S.A.A.) de $\mathcal{F}_Z$ si y sólo si se verifican las siguientes propiedades:*

(1) *p es una singularidad aislada de $\mathcal{F}_Z$.*

(2) *Denotemos $p = p_0$, $\mathcal{M}^n = \mathcal{M}^n_0$, $\mathcal{F}_Z = \mathcal{F}_0$, $\tilde{\mathcal{M}}^n = \mathcal{M}^n_1$, $\tilde{\mathcal{F}}_Z = \mathcal{F}_1$, $E_1 = E$. Si consideramos una sucesión arbitraria de blowing-up's*

$$\mathcal{M}^n_0 \xleftarrow{E_1} \mathcal{M}^n_1 \xleftarrow{E_2} \ldots \xleftarrow{E_N} \mathcal{M}^n_N$$

donde el centro de cada E_i es un punto $p_{i-1} \in Sing(\mathcal{F}_{i-1})$, (aquí $\mathcal{F}_j$ denota al transformado estricto de $\mathcal{F}_{j-1}$ por E_j, $1 \leq i, j \leq N$) entonces $Sing(\mathcal{F}_N)$ es un conjunto finito.

Observe que nuestra definición de una singularidad absolutamente aislada es más general que la dada en [9] (estas últimas son llamadas *singularidades absolutamente aisladas no dicríticas* en el sentido de que no estamos excluyendo el caso en que se presenten singularidades dicríticas en alguna etapa del proceso del blowing-up.

En este estudio, probamos el siguiente resultado de desingularización:

TEOREMA A. *Sea $p \in \mathcal{M}^n$ una singularidad absolutamente aislada de $\mathcal{F}_Z$. Denotemos $p = p_0$, $\mathcal{M}^n = \mathcal{M}^n_0$, $\mathcal{F}_Z = \mathcal{F}_0$, $E = E_1$. Entonces existe una sucesión finita de blowing-up's:*

$$\mathcal{M}^n_0 \xleftarrow{E_1} \mathcal{M}^n_1 \xleftarrow{E_2} \ldots \xleftarrow{E_N} \mathcal{M}^n_N$$

que satisface las siguientes propiedades:

(1) *El centro de cada* E_i *es un punto* $p_{i-1} \in Sing\,(\mathcal{F}_{i-1})$, *donde* $\mathcal{F}_j$ *es el transformado estricto de la foliación* $\mathcal{F}_{j-1}$ *por* E_j, $(1 \leq i, j \leq N)$.

(2) *Si* $q \in Sing\,(\mathcal{F}_N)$, *entonces* q *es una singularidad irreducible.*

La principal herramienta para probar este teorema es usar una fórmula que relaciona la multiplicidad algebraica de la singularidad original con los números de Milnor de las singularidades que aparecen después del primer blowing-up. Observe que este plan de trabajo funciona porque las singularidades del transformado estricto son aisladas.

En dimensión compleja $n = 2$, es conocido que después de un número finito de blowing-up's en los puntos singulares, la foliación $\mathcal{F}_Z$ es transformada en una foliación $\mathcal{F}_Z^*$ que posee un número finito de singularidades, todas ellas irreducibles (ver [10], [20]). Esto significa que si $p^* \in Sing\,(\mathcal{F}_Z^*)$, entonces $\mathcal{F}_Z^*$ es localmente generada por un campo vectorial holomorfo Z^* que tiene parte lineal con autovalores 1 y λ, donde $\lambda \notin \mathbb{Q}^+$ ($\mathbb{Q}^+$ es el conjunto de los números racionales positivos).

Las singularidades irreducibles pueden ser pensadas como *formas finales* en el sentido de que ellas son persistentes bajo nuevos blowing-up's. La estructura topológica local de estas singularidades han sido estudiadas por diversos autores (ver [5], [19]).

En [9], los autores extienden el concepto de singularidad irreducible al caso n-dimensional, siempre que la singularidad sea absolutamente aislada no dicrítica (i.e. no aparecen singularidades dicríticas en ninguna etapa en el proceso de blowing-up). Aquí nosotros probaremos que si p es una singularidad no dicrítica irreducible de la foliación $\mathcal{F}_Z$ tal que p es una S.A.A., entonces p es una singularidad absolutamente aislada no dicrítica y, por lo tanto, podemos aplicar los resultados obtenidos en [9]. Debemos mencionar que formas finales para un campo vectorial holomorfo definido en una variedad compleja 3-dimensional fueron dadas por F. Cano en [7].

El problema de desingularización, cuando $n = 2$, fue estudiado por I. Bendixson [3] y por H. Dulac [14] a comienzos del siglo XX y resuelto por A. Seidenberg [20] en 1968. Una prueba más simple fue dada por A. Ven den Essen [21]. Su argumento usa el concepto de multiplicidad de intersección entre curvas analíticas. Una estrategia para el caso general en dimensión compleja 3, fue desarrollada por F. Cano [8]; sin embargo, un resultado definitivo aún no ha sido obtenido.

Debemos mencionar que para el caso n-dimensional, el único resultado conocido fue obtenido por C. Camacho, F. Cano y P. Sad [9]. En este trabajo, los autores asumen que p es una singularidad absolutamente aislada no dicrítica y con ello generalizan los métodos desarrollados por C. Camacho y P. Sad en [11] cuando $n = 2$.

Otro de los problemas que trataremos es el siguiente: Sea $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}^n$, es decir $p \in \mathcal{M}^n$ es una singularidad dicrítica aislada de la foliación $\mathcal{F}_Z$ generada por el campo vectorial holomorfo Z, tal que $m_p(Z) = \nu$. En [1] se demuestra que es posible asociar a $J_p^\nu(Z)$, el primer jet no nulo de $\mathcal{F}_Z$ en p, un polinomio homogéneo $P_{\nu-1}$ de n variables de grado $\nu - 1$, tal que:

$$(1.2) \qquad J_p^\nu(Z) \; = \; P_{\nu-1}R$$

donde $R(z) = z$ es el campo radial.

El polinomio $P_{\nu-1}$ define una hipersuperficie algebraica S sobre el espacio proyectivo $E^{-1}(p) = \mathbb{C}P(n-1)$:

$$(1.3) \quad S \; = \; \{[z_1; \ldots; z_n] \in \mathbb{C}P(n-1) : P_{\nu-1}(z_1, \ldots, z_n) = 0\}$$

Observe que S contiene todas las singularidades del transformado estricto $\tilde{\mathcal{F}}_Z$. La hipersuperficie S tiene la siguiente interpretación geométrica: Si $\tilde{p} \in S - Sing\left(\tilde{\mathcal{F}}_Z\right)$ entonces la hoja $\tilde{L}$ de $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ que pasa por $\tilde{p}$ es tangente al espacio proyectivo $E^{-1}(p)$ y si $\tilde{p} \in E^{-1}(p) - S$ entonces $\tilde{L}$ es transversal a $E^{-1}(p)$.

Sea $p \in \mathcal{M}^n$ una S.A.A. de $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}^n$. Un caso importante ocurre cuando $Sing\left(\tilde{\mathcal{F}}_Z\right) = \emptyset$, es decir, cuando el transformado estricto de $\mathcal{F}_Z$ no tiene singularidades en $\tilde{\mathcal{M}}^n$. Denotaremos por $\mathcal{D}_0^n$ al conjunto de tales foliaciones. Observe que, en este caso, cada $\tilde{p} \in E^{-1}(p)$ es un punto regular de $\tilde{\mathcal{F}}_Z$. Por lo tanto, es posible definir el *índice de intersección* $i_{\tilde{p}}(E^{-1}(p), \tilde{L})$ entre la hoja $\tilde{L}$ de $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ que pasa por $\tilde{p} \in E^{-1}(p)$ y el espacio proyectivo $E^{-1}(p)$. El índice de intersección tiene la siguiente propiedad:

$$i_{\tilde{p}}(E^{-1}(p), \tilde{L}) > 1 \iff \tilde{L} \text{ es tangente a } E^{-1}(p) \iff \tilde{p} \in S.$$

Probaremos el siguiente resultado:

TEOREMA B. *La multiplicidad algebraica de una foliación en $\mathcal{D}_0^n$ y el índice de intersección son invariantes topológicos.*

La principal herramienta para probar el Teorema B es usar una fórmula que relaciona el índice de intersección con la multiplicidad algebraica del campo vectorial que define la foliación y la multiplicidad de este campo vectorial a lo largo de una subvariedad analítica invariante (ver [10]). Esta fórmula es enunciada y demostrada en el Lema 3.

Cuando $P_{\nu-1}$ es un polinomio no irreducible, puede ser escrito como $P_{\nu-1} = F_1^{r_1} \cdots F_l^{r_l}$, donde los F_j son polinomios homogéneos irreducibles con $deg(F_j) = g_j$. Los números r_j son llamados *multiplicidades* de F_j. El polinomio F_j define una hipersuperficie algebraica S_j dada por:

$$S_j = \{[z_1; \ldots; z_n] \in \mathbb{C}P(n) : F_j(z_1, \ldots, z_n) = 0\} \quad (1 \leq j \leq l).$$

Las S_j son llamadas *componentes irreducibles* de S. Un resultado interesante es que el índice de intersección es genéricamente constante a lo largo de cada componente irreducible de S. Más específicamente, tenemos el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 5. $i_{\tilde{p}}\left(E^{-1}(p), \tilde{L}\right) = r_j + 1$, *salvo en un número finito de puntos $\tilde{p} \in S_j$.*

Los puntos $\tilde{p} \in S_j$ en donde la proposición anterior no se cumple, definen un subconjunto algebraico de S_j de dimensión $\leq n - 3$.

En el caso 3-dimensional, tenemos el siguiente resultado:

TEOREMA C. *El número de componentes irreducibles de S, los grados g_j y las multiplicidades r_j de cada componente irreducible, son invariantes topológicos.*

De esta manera, el Teorema C generaliza los resultados obtenidos por M. Klughertz (ver [18]) a dimensión $n = 3$.

Motivados por el caso bidimensional, (ver [10]), tenemos otro problema de desingularización para una singularidad aislada $p \in \mathcal{M}^n$ de

$\mathcal{F}_Z$. Este problema consiste en probar la existencia de un mapeo holomorfo propio $\phi : \tilde{\mathcal{M}}^* \longrightarrow \mathcal{M}^n$ de una variedad compleja n-dimensional $\tilde{\mathcal{M}}^*$ tal que:

(1) $\phi^{-1}(p) = \bigcup_{i=1}^{N} D_i$, donde las D_i son subvariedades complejas, compactas, de codimensión 1 de $\tilde{\mathcal{M}}^*$ con cruzamiento normales.

(2) La foliación pull-back $\phi^* \left(\mathcal{F}_Z|_{\mathcal{M}^n - \{p\}}\right)$ se extiende a una foliación $\tilde{\mathcal{F}}_Z^*$ de $\tilde{\mathcal{M}}^*$ con conjunto singular de codimensión mayor o igual que 2 y $Sing\left(\tilde{\mathcal{F}}_Z^*\right) \subseteq \phi^{-1}(p)$.

(3) El conjunto de las separatrices de $\tilde{\mathcal{F}}_Z^*$ satisface las siguientes propiedades:
   (a) Todas las separatrices son suaves y disjuntas.
   (b) Ninguna separatriz pasa por una esquina.
   (c) Todas las separatrices son transversales al divisor o están contenidas en él.

En este estudio, probaremos el siguiente resultado:

TEOREMA D. *Sea $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}_0^3$ tal que $m_0(\mathcal{F}_Z) = 2$. Entonces existe una desingularización para $\mathcal{F}_Z$.*

La principal herramienta para probar este resultado es usar el blowing-up a lo largo de una recta proyectiva. En efecto, el mapeo holomorfo ϕ será una composición de blowing-up's con centro en el punto p y un número finito de blowing-up a lo largo de rectas proyectivas.

El presente trabajo está organizado de la manera siguiente: En la sección 2, caracterizamos las foliaciones en $\mathcal{D}^n$ y $\mathcal{D}_0^n$ en términos de sus dos primeros jets no nulos. En la sección 3, probamos una fórmula, en dimensión 3, que relaciona el número de Milnor de la singularidad original, con los números de Milnor de las singularidades del transformado estricto. La sección 4 se destina a resolver el problema de desingularización para una S.A.A. en dimensión 3. En la sección 5 extendemos los resultados obtenidos en las secciones 3 y 4, al caso n-dimensional. En la sección 6, estudiamos las formas finales para singularidades absolutamente aisladas e irreducibles de una foliación por curvas.

En la sección 7 introducimos el concepto de índice de intersección y probamos el Teorema B. En la sección 8 probamos la Proposición 5 enunciada anteriormente y en la sección 9 probamos el Teorema C.

Finalmente, en la sección 10, definimos el blowing-up a lo largo de una recta proyectiva y probamos el Teorema D.