

8. EL ÍNDICE DE INTERSECCIÓN A LO LARGO DE UNA COMPONENTE IRREDUCIBLE DE S

Sea $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}_0^n$ la foliación generada por el campo vectorial $Z = \sum_{i=1}^n Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ con $Z_i = \sum_{k \geq \nu} Z_k^i$, en donde los Z_k^i son polinomios homogéneos de grado k y $m_0(\mathcal{F}_Z) = \nu$. Sean

$$J_0^\nu(Z) = P_{\nu-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right)$$

el primer Jet no nulo de Z y

$$S = \{[z_1; \dots; z_n] \in \mathbb{C}P(n-1) : P_{\nu-1}(z_1, \dots, z_n) = 0\}$$

la hipersuperficie de tangencia de \mathcal{F}_Z . Sabemos que la foliación $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ es generada por el campo \tilde{Z} el cual, en la carta \tilde{U}_n de $\tilde{\mathbb{C}}^n$, se expresa como:

$$(8.1) \quad \tilde{Z} = \sum_{i=1}^n \tilde{Z}_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

donde:

$$(8.2) \quad \begin{cases} \tilde{Z}_i(y_1, \dots, y_n) = \sum_{k \geq \nu} y_n^{k-\nu} [Z_{k+1}^i(\hat{y}) - y_i Z_{k+1}^n(\hat{y})] \\ \tilde{Z}_n(y_1, \dots, y_n) = P_{\nu-1}(\hat{y}) + \sum_{k \geq \nu+1} y_n^{k-\nu} Z_k^n(\hat{y}). \end{cases}$$

y $\hat{y} = (y_1, \dots, y_{n-1}, 1)$.

Dado $\tilde{p} = (y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, 0) \in E^{-1}(0) \cap \tilde{U}_n$, consideramos \tilde{L} la hoja de $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ que pasa por \tilde{p} , la cual puede ser parametrizada por la curva analítica:

$$\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n) : (\mathbb{D}_\epsilon, 0) \longrightarrow (\tilde{L}, \tilde{p})$$

donde

$$(8.3) \quad \begin{cases} \tilde{\alpha}'(T) &= \tilde{Z}(\tilde{\alpha}(T)), \text{ i.e. } \tilde{\alpha}'_i(T) = \tilde{Z}_i(\tilde{\alpha}(T)), \\ \tilde{\alpha}(0) &= \tilde{p}. \end{cases}$$

Por lo tanto $\tilde{\alpha}'_n(0) = \tilde{A}_n(y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, 0) = P_{\nu-1}(y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, 1)$.
Concluimos que:

$$i_{\tilde{p}}(E^{-1}(0), \tilde{L}) > 1 \iff \tilde{p} \in S$$

Dado $\tilde{p} \in S$, vamos a calcular $\tilde{\alpha}''(0)$. De (8.3) tenemos que:

$$\tilde{\alpha}''_n(T) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{Z}_n}{\partial y_i}(\tilde{\alpha}(T)) \tilde{\alpha}'_i(T), \text{ luego}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}''_n(0) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \tilde{Z}_n}{\partial y_i}(\tilde{p}) \tilde{Z}_i(\tilde{p}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \tilde{P}_{\nu-1}}{\partial z_i}(\tilde{y}_0) [Z_{\nu+1}^i(\tilde{y}_0) - y_i^0 Z_{\nu+1}^n(\tilde{y}_0)] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \tilde{P}_{\nu-1}}{\partial z_i}(\tilde{y}_0) Z_{\nu+1}^i(\tilde{y}_0) - Z_{\nu+1}^n(\tilde{y}_0) \sum_{i=1}^{n-1} y_i^0 \frac{\partial \tilde{P}_{\nu-1}}{\partial z_i}(\tilde{y}_0) \end{aligned}$$

donde $\tilde{y}_0 = (y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, 1)$. Por lo tanto:

$$(8.4) \quad \tilde{\alpha}''_n(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{P}_{\nu-1}}{\partial z_i}(y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, 1) Z_{\nu+1}^i(y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, 1)$$

Definimos el polinomio homogéneo $Q_{2\nu-1}$ de grado $2\nu - 1$ como:

$$(8.5) \quad Q_{2\nu-1} = dP_{\nu-1}[Z_{\nu+1}] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_{\nu-1}}{\partial z_i} Z_{\nu+1}^i$$

y denotamos por S^* a la hipersuperficie algebraica generada por $Q_{2\nu-1}$, i.e.

$$(8.6) \quad S^* = \{[z_1; \dots; z_n] \in \mathbb{C}P(n-1) : Q_{2\nu-1}(z_1, \dots, z_n) = 0\}$$

de (8.4) deducimos que:

$$i_{\tilde{p}}(E^{-1}(0), \tilde{L}) > 2 \iff \tilde{p} \in S \cap S^*.$$

Note que los puntos singulares de la hipersuperficie de tangencia S están contenidos en S^* , sin embargo $S \cap S^*$ contiene otros puntos \tilde{p} los cuales no son singularidades de S pero $i_{\tilde{p}}(E^{-1}(0), \tilde{L}) > 2$.

Ejemplo: Considere el campo vectorial holomorfo

$$Z(z_1, z_2, z_3) = (z_1 z_3, z_2 z_3 + z_1^3, z_3^2 + z_1^2 z_2 - z_2^3)$$

Claramente $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}_0^3$, $m_0(Z) = 2$ y el polinomio homogéneo de grado 1 asociado a Z es $P_1(z_1, z_2, z_3) = z_3$. Entonces, la hipersuperficie de tangencia S de \mathcal{F}_Z viene dada por:

$$S = \{(z_1; z_2; z_3) \in \mathbb{C}P(2) : z_3 = 0\}$$

En la carta \tilde{U}_1 de $\tilde{\mathbb{C}}^3$ en donde el blowing-up es expresado por $E(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_1 y_2, y_1 y_3) = (z_1, z_2, z_3)$, tenemos que:

$$\tilde{Z}(y_1, y_2, y_3) = (y_3, 1, y_2 - y_2^3)$$

Sea $\tilde{p} = (0, y_2^0, 0) \in S$ y $\tilde{L} \in \tilde{\mathcal{F}}_Z$ la hoja que pasa por \tilde{p} . No es difícil ver que \tilde{L} está localmente parametrizado por $\tilde{\alpha}(T) = (\tilde{\alpha}_1(T), \tilde{\alpha}_2(T), \tilde{\alpha}_3(T))$, donde:

$$(8.7) \quad \begin{cases} \tilde{\alpha}_1(T) = \frac{y_2^0 - (y_2^0)^3}{2} T^2 + \frac{1 - 3(y_2^0)^2}{6} T^3 - \frac{1}{4} y_2^0 T^4 - \frac{1}{20} T^5 \\ \tilde{\alpha}_2(T) = T + y_2^0 \\ \tilde{\alpha}_3(T) = \left[y_2^0 - (y_2^0)^3 \right] T + \frac{1 - 3(y_2^0)^2}{2} T^2 - y_2^0 T^3 - \frac{1}{4} T^4 \end{cases}$$

luego:

$$\tilde{\alpha}_1(T) = \begin{cases} T^2 \tilde{\xi}_1(T), & \text{con } \tilde{\xi}_1(0) \neq 0; \text{ si } y_2^0 \neq 0, -1, 1. \\ T^3 \tilde{\xi}_1(T), & \text{con } \tilde{\xi}_1(0) \neq 0; \text{ si } y_2^0 = 0, -1, 1. \end{cases}$$

Concluimos que:

$$i_{\tilde{p}}(E^{-1}(0), \tilde{L}) = \begin{cases} 2, & \text{si } \tilde{p} \notin \{[1; 1; 0], [1; -1; 0], [1; 0; 0]\}. \\ 3, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por otro lado $Q_3(z_1, z_2, z_3) = dP_1[Z_3](z_1, z_2, z_3) = z_1^2 z_2 - z_2^3$, luego:

$$S^* = \{[z_1; z_2; z_3] \in \mathbb{C}P(2) : z_1^2 z_2 - z_2^3 = 0\}$$

y

$$S \cap S^* = \{[1; 1; 0], [1; -1; 0], [1; 0; 0]\}.$$

Por lo tanto, en los tres puntos de $S \cap S^*$ el índice de intersección es 3 y si $\tilde{p} \in S - S^*$, entonces $i_{\tilde{p}}(E^{-1}(0), \tilde{L}) = 2$. \square

El ejemplo anterior nos muestra que el índice de intersección es constante en casi todo punto de cada componente irreducible de la hipersuperficie de tangencia S . Más específicamente, sea $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}_0^n$ con $m_0(\mathcal{F}_Z) = \nu$ tal que $J_0^\nu(Z) = P_{\nu-1} \left(\sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right)$.

Desde que $P_{\nu-1}$ es un polinomio homogéneo de n variables, puede ser factorizado:

$$(8.8) \quad P_{\nu-1} = F_1^{r_1} \cdots F_l^{r_l}$$

donde los F_j ($1 \leq j \leq l$) son polinomios homogéneos irreducibles de grado $\deg(F_j) = g_j$. Esta factorización es única salvo factores constantes no nulos. De acuerdo a la factorización (8.8), podemos escribir la hipersuperficie de tangencia

$$S = \{[z_1; \dots; z_n] \in \mathbb{C}P(n-1) : P_{\nu-1}(z_1, \dots, z_n) = 0\}$$

como:

$$(8.9) \quad S = r_1 S_1 + \cdots + r_l S_l$$

donde:

$$(8.10) \quad S_j = \{[z_1; \dots; z_n] \in \mathbb{C}P(n-1) : F_j(z_1, \dots, z_n) = 0\}.$$

Las hipersuperficies algebraicas S_j ($1 \leq j \leq l$) son llamadas las *componentes irreducibles* de S , mientras que los números enteros positivos g_j y r_j son llamados respectivamente el *grado* y la *multiplicidad* de S_j in S . Es claro que el grado y la multiplicidad de S_j en S satisfacen la ecuación:

$$(8.11) \quad \sum_{j=1}^l r_j g_j = \nu - 1$$

De manera análoga a (8.5), definimos los polinomios homogéneos:

$$(8.12) \quad G_j = dF_j [Z_{\nu+1}] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial z_i} Z_{\nu+1}^i$$

y denotamos por S_j^* a la hipersuperficie algebraica:

$$(8.13) \quad S_j^* = \{[z_1; \dots; z_n] \in \mathbb{C}P(n-1) : G_j(z_1, \dots, z_n) = 0\}.$$

Note que los puntos singulares de la hipersuperficie S_j están contenidos en S_j^* . Estamos listos para enunciar y demostrar nuestro principal resultado:

PROPOSICIÓN 5. *Con las notaciones introducidas anteriormente, sea $\tilde{p} \in S_j - S_j^*$ tal que $\tilde{p} \notin S_i$, $1 \leq i \leq l$, $i \neq j$. Entonces $i_{\tilde{p}}(E^{-1}(0), \tilde{L}) = r_j + 1$*

Demostración. Considérese $1 \leq j \leq l$ (j fijo) y denotemos:

$$(8.14) \quad P_{\nu-1} = F_j^{r_j} P \text{ donde } P = F_1^{r_1} \dots F_{j-1}^{r_{j-1}} F_{j+1}^{r_{j+1}} \dots F_l^{r_l}$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\tilde{p} = (y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, 0) \in \tilde{U}_n$. El Teorema es consecuencia de la siguiente fórmula:

$$(8.15) \quad \begin{aligned} \tilde{\alpha}_n^{(k)}(T) &= \frac{r_j!}{(r_j - k + 1)!} F_j^{r_j - k + 1} (\hat{\alpha}(T)) P(\hat{\alpha}(T)) \cdot \\ &\cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\alpha}'_i(T) \frac{\partial F_j}{\partial z_i} (\hat{\alpha}(T)) \right]^{k-1} + \\ &+ \sum_{i=0}^{k-2} F_j^{r_j - i} (\hat{\alpha}(T)) H_{k,i}(T) + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\alpha}_n^{(i)}(T) \psi_{k,i}(T) \end{aligned}$$

donde $2 \leq k \leq r_j + 1$, $\hat{\alpha}(T) = (\tilde{\alpha}_1(T), \dots, \tilde{\alpha}_{n-1}(T), 1)$ y $H_{k,i}$, $\psi_{k,i}$ son funciones analíticas de la variable T . En efecto, sabemos que $\tilde{\alpha}_n(0) = \tilde{\alpha}'_n(0) = 0$. Por inducción, suponga que $\tilde{\alpha}_n^{(i)}(0) = 0$, $\forall 1 \leq i \leq r_j - 1$ entonces:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_n^{(r_j)}(0) &= r_j! F_j(\hat{y}_0) P(\hat{y}_0) \left[\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\alpha}'_i(0) \frac{\partial F_j}{\partial z_i}(\hat{y}_0) \right]^{r_j-1} + \\ &+ \sum_{i=0}^{r_j-2} F_j^{r_j-i}(\hat{y}_0) H_{r_j,i}(0) + \sum_{i=0}^{r_j-1} \tilde{\alpha}_n^{(i)}(0) \psi_{r_j,i}(0) \end{aligned}$$

donde $\hat{y}_0 = (y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, 1)$. Por lo tanto, $\tilde{\alpha}_n^{(r_j)}(0) = 0$. De otro lado:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_n^{(r_j+1)}(0) &= r_j! P(\hat{y}_0) \left[\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\alpha}'_i(0) \frac{\partial F_j}{\partial z_i}(\hat{y}_0) \right]^{r_j} + \\ &+ \sum_{i=0}^{r_j-1} F_j^{r_j-i}(\hat{y}_0) H_{r_j+1,i}(0) + \sum_{i=0}^{r_j} \tilde{\alpha}_n^{(i)}(0) \psi_{r_j+1,i}(0) \end{aligned}$$

De (8.2) y desde que $\tilde{p} \in S_j$, tenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_n^{(r_j+1)}(0) &= r_j! P(\hat{y}_0) \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(Z_{\nu+1}^i(\hat{y}_0) - y_i^0 Z_{\nu+1}^n(\hat{y}_0) \frac{\partial F_j}{\partial z_i}(\hat{y}_0) \right) \right]^{r_j} \\ &= r_j! P(\hat{y}_0) \left[\sum_{i=1}^{n-1} Z_{\nu+1}^i(\hat{y}_0) \frac{\partial F_j}{\partial z_i}(\hat{y}_0) - \right. \\ &= \left. -Z_{\nu+1}^n(\hat{y}_0) \sum_{i=1}^{n-1} y_i^0 \frac{\partial F_j}{\partial z_i}(\hat{y}_0) \right]^{r_j} \\ &= r_j! P(\hat{y}_0) \left[\sum_{i=1}^n Z_{\nu+1}^i(\hat{y}_0) \frac{\partial F}{\partial z_i}(\hat{y}_0) \right]^{r_j} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\tilde{\alpha}_n^{(r_j+1)}(0) = r_j! P(y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, 1) \cdot G_j^{r_j}(y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, 1)$.

Desde que $\tilde{p} \notin S_i, \forall 1 \leq i \leq n, i \neq j$, tenemos que $P(y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, 1) \neq 0$. Más aún $G_j(y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, 1) \neq 0$ (recuerde que $\tilde{p} \notin S_j^*$). Luego $\tilde{\alpha}_n^{(r_j+1)}(0) \neq 0$ y la demostración del teorema está lista.

Prueba de la fórmula (8.15): Procediendo por inducción sobre k , para $k = 2$ la fórmula se cumple trivialmente. Suponiendo que es válida para k , debemos probarla para $k + 1$:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_n^{(k+1)}(T) &= \frac{r_j!}{(r_j - k)!} F_j^{r_j - k}(\hat{\alpha}(T)) P(\hat{\alpha}(T)) \cdot \\ &\cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\alpha}'_i(T) \frac{\partial F_j}{\partial z_i}(\hat{\alpha}(T)) \right]^k + \frac{r_j!}{(r_j - k + 1)!} F_j^{r_j - k + 1}(\hat{\alpha}(T)) \cdot \\ &\cdot \frac{d}{dT} \left[P(\hat{\alpha}(T)) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\alpha}'_i(T) \frac{\partial F_j}{\partial z_i}(\hat{\alpha}(T)) \right)^{r_j} \right] + \\ &+ \sum_{i=0}^{k-2} (r_j - i) F_j^{r_j - i - 1}(\hat{\alpha}(T)) H_{k,i}(T) \frac{d}{dT} \left(F_j^{r_j - k}(\hat{\alpha}(T)) \right) + \\ &+ \sum_{i=0}^{k-2} F_j^{r_j - i}(\hat{\alpha}(T)) H'_{k,i}(T) + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\alpha}_n^{(i+1)}(T) \psi_{k,i}(T) + \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\alpha}_n^{(i)}(T) \psi'_{k,i}(T) \end{aligned}$$

Definimos:

$$\begin{aligned} H_{k+1,k-1}(T) &= \frac{r_j!}{(r_j - k + 1)!} \cdot \\ &\cdot \frac{d}{dT} \left[P(\hat{\alpha}(T)) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\alpha}'_i(T) \frac{\partial F_j}{\partial z_i}(\hat{\alpha}(T)) \right)^{r_j} \right] \\ &+ (r_j - k + 2) H_{k,k-2}(T) \frac{d}{dT} \left(F_j(\hat{\alpha}(T)) \right) \end{aligned}$$

$$H_{k+1,i}(T) = (r_j - i + 1)H_{k,i-1}(T) \frac{d}{dT} (F_j(\hat{\alpha}(T))) + H'_{k,i}(T)$$

donde $1 \leq i \leq k - 2$.

$$H_{k+1,0}(T) = H'_{k,0}(T)$$

$$\psi_{k+1,k}(T) = \psi_{k,k}(T).$$

$$\psi_{k+1,i}(T) = \psi_{k,i-1}(T) + \psi'_{k,i}(T); \quad 1 \leq i \leq k - 1.$$

$$\psi_{k+1,0}(T) = \psi'_{k,0}(T).$$

Luego, tenemos que:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_n^{(k+1)}(T) &= \frac{r_j!}{(r_j - k)!} F_j^{r_j - k + 1}(\hat{\alpha}(T)) P(\hat{\alpha}(T)) \cdot \\ &\cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\alpha}_i'(T) \frac{\partial F_j}{\partial z_i}(\hat{\alpha}(T)) \right]^k + \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} F_j^{r_j - i}(\hat{\alpha}(T)) H_{k+1,i}(T) + \\ &+ \sum_{i=0}^k \tilde{\alpha}_n^i(T) \psi_{k+1,i}(T). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula está probada. □