

5. EL TEOREMA DE DESINGULARIZACIÓN PARA  
CAMPOS VECTORIALES HOLOMORFOS  
 $n$ -DIMENSIONALES CON SINGULARIDADES  
ABSOLUTAMENTE AISLADAS

Con la finalidad de probar el Teorema de desingularización para el caso  $n$ -dimensional, primeramente necesitamos extender el Teorema 2 a dimensión  $n > 3$ .

Sea  $Z$  un campo vectorial holomorfo con singularidad dicrítica aislada en  $0 \in \mathbb{C}^n$  tal que su transformado estricto tenga singularidades aisladas. Si  $m_0(Z) = \nu$  entonces  $Z = \sum_{k \geq \nu} Z_k$  donde

$$Z_\nu = P_{\nu-1} \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad Z_k = \sum_{i=1}^n Z_k^i \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad k \geq \nu + 1 \text{ y } Z_k^i \text{ son polinomios homogéneos de grado } k.$$

Consideremos el campo vectorial  $Z_{\nu+1} + R$ , (donde  $R = \sum_{k \geq \nu+2} Z_k$ )

y supongamos que:

- (1)  $Z_{\nu+1} + R$  tiene una singularidad aislada en  $0 \in \mathbb{C}^n$ .
- (2) Su transformado estricto  $\tilde{Z}_{\nu+1} + \tilde{R}$  tiene singularidades aisladas en el divisor  $E^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$ .

De (2.9), es fácil ver que  $0 \in \mathbb{C}^n$  no es una singularidad dicrítica aislada del campo vectorial  $Z_{\nu+1} + R$ , por lo tanto, de (3.4) tenemos que:

$$(5.1) \quad \mu_0(Z_{\nu+1} + R) = g(\nu + 1) + \sum_{\tilde{q} \in E^{-1}(0)} \mu_{\tilde{q}}(\tilde{Z}_{\nu+1} + \tilde{R})$$

donde  $g(\nu) = \nu^n - \nu^{n-1} - \dots - \nu - 1$ .

De la hipótesis 2.) podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que las singularidades de  $\tilde{Z}_{\nu+1} + \tilde{R}$  están en la carta  $\tilde{U}_1$  de  $\tilde{\mathbb{C}}^n$ , donde

$$(5.2) \quad E(y_1, \dots, y_n) = (y_1, y_1 y_2, \dots, y_1 y_n) = (z_1, \dots, z_n)$$

Entonces

$$E^* [Z_{\nu+1} + R] (y) = \left( \sum_{k \geq \nu+1} y_1^k Z_k^1(\hat{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_1} + \\ + \sum_{i=2}^n \left( \sum_{k \geq \nu+1} y_1^{k-1} [Z_k^i(\hat{y}) - y_i Z_k^j(\hat{y})] \right) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

donde  $y = (y_1, \dots, y_n)$  e  $\hat{y} = (1, y_2, \dots, y_n)$ .

Por lo tanto,  $E^* [Z_{\nu+1} + R]$  es divisible por  $y_1^\nu$  y tenemos que:

$$(5.3) \quad \tilde{Z}_{\nu+1}(y) + \tilde{R}(y) = y_1 Z_{\nu+1}^1(\hat{y}) \frac{\partial}{\partial y_1} + \\ + \sum_{i=2}^n (Z_{\nu+1}^i(\hat{y}) - y_i Z_{\nu+1}^1(\hat{y})) \frac{\partial}{\partial y_i} + \\ + y_1 \tilde{R}(y)$$

Concluimos que las singularidades de  $\tilde{Z}_{\nu+1} + \tilde{R}$  son los puntos  $\tilde{q}_j = (0, y_2^j, \dots, y_n^j)$ ,  $1 \leq j \leq N$ , donde  $y_2^j, \dots, y_n^j$  satisfacen las condiciones siguientes:

$$(5.4) \quad Z_{\nu+1}^i(1, y_2^j, \dots, y_n^j) - y_i^j Z_{\nu+1}^1(1, y_2^j, \dots, y_n^j) = 0,$$

en donde  $2 \leq i \leq n$  y  $i \leq j \leq N$ .

Para  $\epsilon > 0$ , consideremos la perturbación  $Z_\epsilon = \epsilon Z_\nu + Z_{\nu+1} + R$ . Claramente  $0 \in \mathbb{C}^n$  es una singularidad dicrítica aislada de  $Z_\epsilon$  y

$$E^* (Z_\epsilon) = \epsilon E^* (Z_\nu) + E^* (Z_{\nu+1} + R) \\ = \epsilon \left[ E^* (P_{\nu-1}) E^* \left( \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \right] + E^* (Z_{\nu+1} + R)$$

$$E^* (Z_\epsilon) (y) = \epsilon y_1^\nu P_{\nu-1}(\hat{y}) \frac{\partial}{\partial y_1} + E^* [Z_{\nu+1} + R]$$

Por lo tanto  $E^* (Z_\epsilon)$  es divisible por  $y_1^\nu$  y tenemos:

$$(5.5) \quad \tilde{Z}_\epsilon(y) = \epsilon P_{\nu-1}(\hat{y}) \frac{\partial}{\partial y_1} + \tilde{Z}_{\nu+1}(y) + \tilde{R}(y)$$

o equivalentemente:

$$(5.6) \quad \tilde{Z}_\epsilon(y) = [\epsilon P_{\nu-1}(\hat{y}) + y_1 Z_{\nu+1}^1(\hat{y})] \frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_{i=2}^n (Z_{\nu+1}^i(\hat{y}) - y_i Z_{\nu+1}^1(\hat{y})) \frac{\partial}{\partial y_i} + y_1 \tilde{R}(y)$$

Tenemos entonces que  $\tilde{Z}_\epsilon$  presenta dos tipos de singularidades:

- **Singularidades en el divisor:** Son los puntos

$$\tilde{p}_j = (0, y_2^j, \dots, y_n^j)$$

tales que  $y_2^j, \dots, y_n^j$  satisfacen las condiciones (5.4) y

$$P_{\nu-1}(1, y_2^j, \dots, y_n^j) = 0.$$

Entonces existe  $0 \leq N_1 < N$  tal que  $\tilde{p}_j = \tilde{q}_j, \forall 1 \leq j \leq N_1$ .

Observe que estos puntos también son singularidades de  $\tilde{Z}$ .

- **Singularidades fuera del divisor:** Estos puntos tienen coordenadas  $\tilde{p}_k = \tilde{p}_k(\epsilon) = (y_1^k(\epsilon), \dots, y_n^k(\epsilon))$  con  $y_1^k(\epsilon) \neq 0$ . De (5.5), se sigue que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{p}_k(\epsilon) = \tilde{q}_j, \forall k \in I_j, \forall 1 \leq j \leq N$ ; donde  $I_j$  es un conjunto finito de índices.

Para cada singularidad  $\tilde{p}_k = \tilde{p}_k(\epsilon)$  de  $\tilde{Z}_\epsilon$  fuera del divisor, denotamos  $p_k = E(\tilde{p}_k)$  y por lo tanto tenemos que:

$$(5.7) \quad \mu_{p_k}(Z_\epsilon) = \mu_{\tilde{p}_k}(\tilde{Z}_\epsilon)$$

Si  $\epsilon$  es suficientemente pequeño, se sigue que:

$$(5.8) \quad \mu_{\tilde{q}_j}(\tilde{Z}_{\nu+1} + \tilde{R}) = \begin{cases} \mu_{\tilde{p}_j}(\tilde{Z}_\epsilon) + \sum_{k \in I_j} \mu_{\tilde{p}_k}(\tilde{Z}_\epsilon), & \text{si } 1 \leq j \leq N_1 \\ \sum_{k \in I_j} \mu_{\tilde{p}_k}(\tilde{Z}_\epsilon), & \text{si } N_1 + 1 \leq j \leq N \end{cases}$$

y

$$(5.9) \quad \mu_0(Z_{\nu+1} + R) = \mu_0(Z_\epsilon) + \sum_{j=1}^N \sum_{k \in I_j} \mu_{p_k}(Z_\epsilon)$$

De (5.1), (5.7), (5.8) y (5.9), tenemos que:

$$\begin{aligned} g(\nu + 1) + \sum_{j=1}^N \mu_{\tilde{q}_j}(\tilde{Z}_{\nu+1} + \tilde{R}) &= \mu_0(Z_\epsilon) + \sum_{j=1}^N \sum_{k \in I_j} \mu_{\tilde{p}_k}(\tilde{Z}_\epsilon) \\ &= \mu_0(Z_\epsilon) + \sum_{j=1}^N \mu_{\tilde{q}_j}(\tilde{Z}_{\nu+1} + \tilde{R}) - \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N_1} \mu_{\tilde{p}_j}(\tilde{Z}_\epsilon) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(5.10) \quad \mu_0(Z_\epsilon) = g(\nu + 1) + \sum_{\tilde{q} \in E^{-1}(0)} \mu_{\tilde{q}}(\tilde{Z}_\epsilon)$$

Afirmamos que  $\mu_0(Z) = \mu_0(Z_\epsilon)$  y  $\mu_{\tilde{p}_j}(\tilde{Z}) = \mu_{\tilde{p}_j}(\tilde{Z}_\epsilon)$ ,  $1 \leq j \leq N_1$ . En efecto, desde que  $Z_\nu(0) = 0$ , existe  $r > 0$  tal que  $\|z\| < r \implies \|Z(z) - Z_\epsilon(z)\| = (1 - \epsilon)\|Z_\nu(z)\| < 2$ . Sea  $0 < r_1 < r$  y consideremos la homotopía  $G : [0, 1] \times S_{r_1}^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$  dada por:

$$G(t, z) = \frac{tZ_\epsilon(z) + (1-t)Z(z)}{\|tZ_\epsilon(z) + (1-t)Z(z)\|}$$

Entonces  $G(0, z) = \frac{Z(z)}{\|Z(z)\|}$  y  $G(1, z) = \frac{Z_\epsilon(z)}{\|Z_\epsilon(z)\|}$  de aquí  $\mu_0(Z) = \mu_0(Z_\epsilon)$ .

Sea  $\tilde{p}_j = (0, y_2^j, \dots, y_n^j)$  ( $1 \leq j \leq N_1$ ) una singularidad de  $\tilde{Z}_\epsilon$  (la cual también es singularidad de  $\tilde{Z}$ ), entonces  $P_{\nu-1}(1, y_2^j, \dots, y_n^j) = 0$ . Se sigue que existe  $\tilde{r} > 0$  tal que  $\|(y_2, \dots, y_n) - (y_2^j, \dots, y_n^j)\| < \tilde{r} \implies |P_{\nu-1}(1, y_2, \dots, y_n)| < \frac{2}{1-\epsilon}$ . Por lo tanto, de (5.6) tenemos que  $\|y - \tilde{p}_j\| < \tilde{r} \implies \|\tilde{Z}(y) - \tilde{Z}_\epsilon(y)\| = (1 - \epsilon)|P_{\nu-1}(1, y_2, \dots, y_n)| < 2$ .

Sea  $0 < \tilde{r}_1 < \tilde{r}$  y consideremos la homotopía  $\tilde{G} : [0, 1] \times S_{\tilde{r}_1}^{2n-1}(\tilde{p}_j) \rightarrow S^{2n-1}$ , (donde  $S_{\tilde{r}_1}^{2n-1}(\tilde{p}_j) = \{\|y - \tilde{p}_j\| = \tilde{r}_1\}$ ) dada por:

$$\tilde{G}(t, y) = \frac{t\tilde{Z}_\epsilon(y) + (1-t)\tilde{Z}(y)}{\|t\tilde{Z}_\epsilon(y) + (1-t)\tilde{Z}(y)\|}$$

Entonces  $\tilde{G}(0, y) = \frac{\tilde{Z}(y)}{\|\tilde{Z}(y)\|}$  y  $\tilde{G}(1, z) = \frac{\tilde{Z}_\epsilon(y)}{\|\tilde{Z}_\epsilon(y)\|}$  de aquí  $\mu_{\tilde{p}_j}(\tilde{Z}) = \mu_{\tilde{p}_j}(\tilde{Z}_\epsilon)$ ,  $\forall 1 \leq j \leq N_1$ , lo cual prueba la afirmación.

De (5.10), se sigue que:

$$(5.11) \quad \mu_0(Z) = g(\nu + 1) + \sum_{\tilde{q} \in E^{-1}(0)} \mu_{\tilde{q}}(\tilde{Z})$$

En el caso que  $0 \in \mathbb{C}^n$  no sea una singularidad aislada de  $Z_{\nu+1} + R$ , consideramos la perturbación  $Z_\delta = Z_\nu + Z_{\nu+1} + \delta Y_{\nu+1} + R$  donde  $Y_{\nu+1}$  es un campo vectorial homogéneo de grado  $\nu + 1$  tal que  $0 \in \mathbb{C}^n$  es una singularidad aislada de  $Z_{\nu+1} + \delta Y_{\nu+1}$ . Observe que si  $\delta > 0$  es suficientemente pequeño entonces  $0 \in \mathbb{C}^n$  es una singularidad aislada de  $Z_\delta$ . En efecto, desde que  $Y_{\nu+1}(0) = 0$ , existe  $r > 0$  tal que  $\|z\| < r \implies \|Y_{\nu+1}(z)\| < 1$ . Como  $0 \in \mathbb{C}^n$  es una singularidad aislada de  $Z$ , entonces definimos  $m = \inf\{\|Z(z)\| : \|z\| = r'\}$ , donde  $0 < r' < r$ . Por lo tanto  $\|Z_\delta(z)\| \geq \|Z(z)\| - \delta\|Y_{\nu+1}(z)\| > m - \delta$ . Se sigue que, si  $\delta < m$  entonces  $\|Z_\delta(z)\| > 0$ ,  $\forall \|z\| = r'$ , de aquí  $0 \in \mathbb{C}^n$  es una singularidad aislada de  $Z_\delta$ , y satisface las dos condiciones dadas al inicio de la sección. De (5.11):

$$(5.12) \quad \mu_0(Z_\delta) = g(\nu + 1) + \sum_{\tilde{q} \in E^{-1}(0)} \mu_{\tilde{q}}(\tilde{Z}_\delta)$$

Como antes, podemos probar que  $\mu_0(Z) = \mu_0(Z_\delta)$  y  $\mu_{\tilde{p}}(\tilde{Z}) = \mu_{\tilde{p}}(\tilde{Z}_\delta)$ . De este modo, hemos probado el siguiente:

**TEOREMA 2.** *Sea  $Z$  un campo vectorial holomorfo con singularidad aislada en  $0 \in \mathbb{C}^n$ , tal que  $\tilde{Z}$  tiene singularidades aisladas. Si  $0 \in \mathbb{C}^n$  es una singularidad dicrítica y  $m_0(Z) = \nu$ , entonces*

$$\mu_0(Z) = g(\nu + 1) + \sum_{\tilde{q} \in E^{-1}(0)} \mu_{\tilde{q}}(\tilde{Z}),$$

donde  $g(\nu) = \nu^n - \nu^{n-1} - \dots - \nu - 1$ .

**Observación.** No es difícil probar que la fórmula (3.22) es igual a la fórmula del Teorema 2. En efecto,

$$g(\nu + 1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n+1-2k}{n+1-k} \nu^{n-k}.$$

Ahora, probamos el teorema de desingularización para el caso  $n$ -dimensional

**TEOREMA A.** *Sea  $p \in \mathcal{M}^n$  una singularidad absolutamente aislada de  $\mathcal{F}_Z$ . Denotemos  $p = p_0$ ,  $\mathcal{M}^n = \mathcal{M}_0^n$ ,  $\mathcal{F}_Z = \mathcal{F}_0$  y  $E_1 = E$ . Entonces existe una sucesión finita de blowing up's*

$$\mathcal{M}_0^n \xleftarrow{E_1} \mathcal{M}_1^n \xleftarrow{E_2} \dots \xleftarrow{E_N} \mathcal{M}_N^n$$

que satisface las siguientes propiedades:

- (1) *El centro de cada  $E_i$  es un punto  $p_{i-1} \in \text{Sing}(\mathcal{F}_{i-1})$ , donde  $\mathcal{F}_j$  denota el transformado estricto de la foliación  $\mathcal{F}_{j-1}$  por  $E_j$  ( $1 \leq i, j \leq N$ ).*
- (2) *Si  $q \in \text{Sing}(\mathcal{F}_N)$  entonces  $q$  es una singularidad irreducible.*

**Demostración.** Suponga que  $m_p(Z) = \nu \geq 2$ . Desde que  $p$  es una S.A.A. de  $\mathcal{F}_Z$ , de (3.4) y el Teorema 2, tenemos que:

$$\mu_p(Z) = g(\sigma) + \sum_{\tilde{p} \in E^{-1}(p)} \mu_{\tilde{p}}(\tilde{Z})$$

en donde  $g(\sigma) = \sigma^n - \sigma^{n-1} - \dots - \sigma - 1$ , con  $\sigma = \nu$  si  $p$  es una singularidad no dicrítica de  $Z$  y  $\sigma = \nu + 1$ , en caso contrario. No es difícil ver que la función  $g$  es decreciente para todo  $\sigma \geq 2$ .

En cualquier caso (dicrítico o no), obtenemos que  $\nu > 1$  implica que  $\mu_q(\tilde{Z}) < \mu_p(Z)$ ,  $\forall q \in E^{-1}(0)$ . Desde que  $\mu_p(Z) \geq m_p(Z)$ ,  $\forall p$ ; después de un número finito de blowing-up's  $E_1 = E$ ,  $E_2, \dots, E_N$  centrados en puntos singulares, obtenemos solamente puntos con multiplicidad algebraica  $\leq 1$ .

Definimos  $\phi = E_N \circ E_{N-1} \circ \dots \circ E$ , se sigue que  $\phi : \mathcal{M}_N^n \rightarrow \mathcal{M}_0^n$  es un mapeo holomorfo propio y el pull-back  $\phi^* \left( \mathcal{F}_0|_{\mathcal{M}^n - \{p\}} \right)$  se extiende a una foliación singular  $\mathcal{F}_N$  sobre  $\mathcal{M}_N^n$  con conjunto singular de codimensión  $n$ .

Por lo tanto, si  $q \in \text{Sing}(\mathcal{F}_N)$  entonces  $m_q(\mathcal{F}_N) = 1$ . De esta manera, el Teorema A es una consecuencia del siguiente:

**LEMA 2.** *Sea  $p \in \mathcal{M}^n$ , ( $n \geq 3$ ) un punto singular de  $\mathcal{F}_Z$  tal que  $m_p(Z) = 1$  y  $p$  no es irreducible. Entonces  $p$  no es una S.A.A.*

**Prueba del Lema 2.**

Sea  $z = (z_1, \dots, z_n)$  coordenadas locales de una vecindad de  $p$  en  $\mathcal{M}^n$  tal que  $p = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$ . En estas coordenadas,  $\mathcal{F}_Z$  es generado por el campo vectorial holomorfo  $Z = \sum_{i=1}^n Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ , donde  $Z_i = \sum_{k \geq \nu} Z_k^i$  y  $Z_k^i$  son polinomios homogéneos de grado  $k$ . Desde que  $p$  no es un punto regular irreducible,  $DZ(0)$  tiene forma canónica de Jordan:

$$(5.13) \quad DZ(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \epsilon_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $\epsilon_j \in \{0, 1\}$ ,  $\forall j = 1, \dots, n-1$ . Se sigue que:

$$\begin{aligned} Z(z) &= \left( z_2 + \sum_{k \geq 2} Z_k^1(z) \right) \frac{\partial}{\partial z_1} + \left( \epsilon_i z_{i+1} + \sum_{k \geq 2} Z_k^i(z) \right) \frac{\partial}{\partial z_i} + \\ &+ \left( \sum_{k \geq 2} Z_k^n(z) \right) \frac{\partial}{\partial z_n} \end{aligned}$$

En la carta del blowing-up  $y_1 = z_1$ ,  $y_i = \frac{z_i}{z_1}$  ( $2 \leq i \leq n$ ), tenemos que el transformado estricto  $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ , es generado por  $\tilde{Z} = \sum_{i=1}^n \tilde{Z}_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ , donde:

$$\tilde{Z}_1(y) = y_1 y_2 + \sum_{k \geq 2} Z_k^1(\hat{y}) y_1^k$$

$$\tilde{Z}_i(y) = \epsilon_i y_{i+1} - y_2 y_i + \sum_{k \geq 2} [A_k^i(\hat{y}) - y_i A_k^1(\hat{y})] y_1^{k-1}, \quad 2 \leq i \leq n-1$$

$$\tilde{Z}_n(y) = -y_2 y_n + \sum_{k \geq 2} [Z_k^n(\hat{y}) - y_n Z_k^1(\hat{y})] y_1^{k-1}$$

con  $\hat{y} = (1, y_2, \dots, y_n)$ . Por lo tanto

$$\tilde{Z}(0, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=2}^{n-1} (\epsilon_i y_{i+1} - y_2 y_i) \frac{\partial}{\partial y_i} - y_2 y_n \frac{\partial}{\partial y_n}$$

Ahora, consideremos dos caso:

**Caso 1:** Existe  $i_0 \in \{2, \dots, n-1\}$  tal que  $\epsilon_{i_0} = 0$ . En este caso:

$$\tilde{Z}(0, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=2, i \neq i_0}^{n-1} (\epsilon_i y_{i+1} - y_2 y_i) \frac{\partial}{\partial y_i} - y_2 y_{i_0} \frac{\partial}{\partial y_{i_0}} - y_2 y_n \frac{\partial}{\partial y_n}$$

Es fácil ver que  $\tilde{Z}(0, \dots, 0, y_{i_0+1}, 0, \dots, 0) = 0, \forall y_{i_0+1} \in \mathbb{C}$ , por lo tanto  $Sing(\tilde{\mathcal{F}}_Z)$  es un conjunto infinito y se sigue que  $p$  no es una S.A.A.

**Caso 2:**  $\epsilon_2 = \dots = \epsilon_{n-1} = 1$ . En este caso, no es difícil ver que  $0 \in \mathbb{C}^n$  en la carta  $y_1 = z_1, y_i = \frac{z_i}{z_1} (2 \leq i \leq n)$ , es la única singularidad de  $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ , más aún:

$$(5.14) \quad D\tilde{Z}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \alpha_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $\alpha_i = Z_2^i(1, 0, \dots, 0), 2 \leq i \leq n$ .

El polinomio característico de  $D\tilde{Z}(0)$  es  $\Delta(t) = t^n$ . Con el fin de obtener la forma canónica de Jordan de la matriz  $D\tilde{Z}(0)$ , debemos calcular el polinomio minimal  $m(t)$  de  $D\tilde{Z}(0)$ . Observe que:

$$(5.15) \quad \tilde{M} = D\tilde{Z}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \Theta \\ P & R_{n-1}(1) \end{pmatrix}$$

en donde  $0 \in \mathbb{C}^{1 \times 1} \approx \mathbb{C}$ ,  $\Theta = [0 \dots 0] \in \mathbb{C}^{1 \times (n-1)} \approx \mathbb{C}^{n-1}$ ,  $P^t = [\alpha_2 \dots \alpha_n] \in \mathbb{C}^{1 \times (n-1)} \approx \mathbb{C}^{n-1}$  y  $R_{n-1}(1) \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$  es la matriz triangular superior de orden 1, es decir:

$$(5.16) \quad R_{n-1}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(aquí  $\mathbb{C}^{n \times m}$  denota al espacio de matrices de  $n$  filas y  $m$  columnas). Denotaremos  $R_{n-1}(k) = [R_{n-1}(1)]^k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ . Con estas notaciones, no es difícil probar que:

$$(5.17) \quad \tilde{M}^k = \begin{pmatrix} 0 & \Theta \\ R_{n-1}(k-1)P & R_{n-1}(k) \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+$$

Desde que  $R_{n-1}(k) = 0$  si y sólo si  $k \geq n-1$ , tenemos que  $\tilde{M}^k \neq 0$ ,  $\forall 1 \leq k \leq n-2$ . Observe que:

$$\tilde{M}^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto, se presentan dos posibilidades:

i) Si  $\alpha_n = 0$  entonces  $\tilde{M}^{n-1} = 0$ , se sigue que  $m(t) = t^{n-1}$ . Luego  $D\tilde{Z}(0)$  tiene como forma canónica de Jordan a la matriz (5.13) con  $\epsilon_2 = \dots = \epsilon_{n-2} = 1$  y  $\epsilon_{n-1} = 0$ . Concluimos que 0 no es una S.A.A de  $\mathcal{F}_Z$ .

ii) Si  $\alpha_n \neq 0$  entonces afirmamos que existe un cambio lineal de coordenadas  $\varphi$  tal que  $\varphi^* \tilde{Z}$  satisface las condiciones del caso 2-(i).

En efecto, definimos las transformaciones lineales  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  y  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , donde:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\alpha_n} x_n, \varphi_2(x) = x_1 \text{ y } \varphi_i(x) = x_{i-1} - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_n} x_n \quad (3 \leq i \leq n)$$

y

$$\psi_1(y) = y_2, \psi_i(y) = \alpha_i y_1 + y_{i+1} \quad (2 \leq i \leq n-1) \text{ y } \psi_n(y) = \alpha_n y_1.$$

Es claro que  $\psi = \varphi^{-1}$ . Ahora, definimos  $X = \varphi^* \tilde{Z} = \psi \tilde{Z} \circ \varphi$ . Si denotamos  $X = \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , entonces  $B_1 = \tilde{Z}_2 \circ \varphi$ ,  $B_i = \alpha_i \tilde{Z}_1 \circ \varphi + \tilde{Z}_{i+1} \circ \varphi$  ( $2 \leq i \leq n-1$ ) y  $B_n = \alpha_n \tilde{Z}_1 \circ \varphi$ . Desde que  $DX(0) = \psi D\tilde{Z}(0)\varphi$ ; un fácil cálculo prueba que  $DX(0) = R_n(1)$ , más aún, en la carta  $u_1 = x_1$ ,  $u_i = \frac{x_i}{x_1}$  ( $2 \leq i \leq n$ ); tenemos que:

$$(5.18) \quad D\tilde{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \beta_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \beta_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $\beta_i = B_2^i(1, 0, \dots, 0)$ ,  $2 \leq i \leq n$ . Note que:

$$\beta_n = B_2^n(1, 0, \dots, 0) = \frac{\partial^2 B_n}{\partial x_1^2}(0, \dots, 0) = \alpha_n \frac{\partial^2 \tilde{Z}_1}{\partial y_2^2}(0, \dots, 0) = 0.$$

Por lo tanto 0 no es una S.A.A. de  $X = \varphi^* \tilde{Z}$ . Esto finaliza la prueba del Lema 2.  $\square$