4. EL TEOREMA DE DESINGULARIZACIÓN PARA CAMPOS VECTORIALES HOLOMORFOS 3-DIMENSIONALES CON SINGULARIDADES ABSOLUTAMENTE AISLADAS

Sea $\mathcal{M}^3$ una variedad compleja 3-dimensional y $\mathcal{F}_Z$ una foliación holomorfa, por curvas, de $\mathcal{M}^3$ generada por el campo vectorial $Z = \sum_{i=1}^{3} Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$. Recordemos que un punto $p \in Sing(\mathcal{F}_Z)$ es llamado *irreducible*, si $m_p(Z) = 1$ y la parte lineal de Z en p tiene al menos un autovalor no nulo.

El problema de desingularización para una singularidad (dicrítica o no) de $p \in \mathcal{M}^3$ de $\mathcal{F}_Z$, consiste en probar la existencia de una función holomorfa propia, $\phi : \mathcal{M}^* \to \mathcal{M}^3$ de una variedad compleja 3-dimensional $\mathcal{M}^*$ que cumple las siguientes condiciones:

(1) $\phi^{-1}(p) = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ es unión de subvariedades complejas compactas de codimensión uno y con cruzamientos normales.
(2) La foliación pull-back $\phi^*\left(\mathcal{F}_Z|_{\mathcal{M}^n - \{p\}}\right)$ se extiende a una foliación de $\mathcal{M}^*$ con conjunto singular de codimensión ≥ 2 y tal que todos sus puntos singulares son irreducibles.

En esta sección, probaremos el siguiente resultado de desingularización:

TEOREMA A. (Caso 3-dimensional). *Sea $p \in \mathcal{M}^3$ una singularidad absolutamente aislada de $\mathcal{F}_Z$. Denotemos $p = p_0$, $\mathcal{M}^3 = \mathcal{M}^3_0$, $\mathcal{F}_Z = \mathcal{F}_0$ y $E_1 = E$. Entonces existe una sucesión finita de blowing up's*

$$\mathcal{M}^3_0 \xleftarrow{E_1} \mathcal{M}^3_1 \xleftarrow{E_2} \dots \xleftarrow{E_N} \mathcal{M}^3_N$$

que satisface las siguientes propiedades:

(1) *El centro de cada E_i es un punto $p_{i-1} \in Sing\,(\mathcal{F}_{i-1})$, donde $\mathcal{F}_j$ denota el transformado estricto de la foliación $\mathcal{F}_{j-1}$ por E_j $(1 \leq i, j \leq N)$.*
(2) *Si $q \in Sing\,(\mathcal{F}_N)$ entonces q es una singularidad irreducible.*

Demostración. Sea $m_p(Z) = \nu \geq 2$. Desde que p es una S.A.A. de $\mathcal{F}_Z$, de (3.1) y el Teorema 1, tenemos que

$$\mu_p(Z) = \begin{cases} \nu^3 - \nu^2 - \nu - 1 + \sum\limits_{q \in E^{-1}(p)} \mu_q(\tilde{Z}), & \text{si } p \text{ es no dicrítico.} \\ \\ \nu^3 + 2\nu^2 - 2 + \sum\limits_{q \in E^{-1}(p)} \mu_q(\tilde{Z}), & \text{si } p \text{ es dicrítico.} \end{cases}$$

En cualquier caso (dicrítico o no) se tiene que

$$\nu > 1 \Longrightarrow \mu_q(\tilde{Z}) < \mu_p(Z), \ \forall\, q \in E^{-1}(p) \tag{4.1}$$

Desde que $\nu \leq \mu_p(Z)$, $\forall\, p$, afirmamos que después de un número finito de blowing-up's $E_1 = E$, $E_2, \ldots, E_N$ con centro en puntos singulares, se obtiene solamente puntos con multiplicidad algebraica ≤ 1. En efecto, caso contrario, en cada blowing-up existiría por lo menos un punto en el divisor cuya multiplicidad algebraica es ≥ 2, es decir, dado $k \in \mathbb{N}$, $\exists\, p_k \in E^{-1}(p_{k-1})$ tal que $m_p(Z^{(k)}) \geq 2$, en donde $Z^{(1)} = \tilde{Z}$ y $Z^{(k)} = \tilde{Z}^{(k-1)}$. De (4.1) se sigue que

$$\mu_{p_1}\left(Z^{(1)}\right) < \mu_p(Z),\ \mu_{p_2}\left(Z^{(2)}\right) < \mu_{p_1}\left(Z^{(1)}\right), \ldots$$

$$\ldots, \mu_{p_k}\left(Z^{(k)}\right) < \mu_{p_{k-1}}\left(Z^{(k-1)}\right), \ldots \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

lo cual implica que

$$\mu_p(Z) > \mu_{p_1}\left(Z^{(1)}\right) > \ldots > \mu_{p_k}\left(Z^{(k)}\right) > \ldots \geq 1$$

lo cual es, evidentemente, una contradicción. Esto prueba la afirmación.

Definimos $\varphi = E_N \circ E_{N-1} \circ \ldots \circ E$, se sigue que $\varphi : \mathcal{M}_N^3 \to \mathcal{M}_0^3$ es una función holomorfa propia y el pull-back $\phi^*\left(\mathcal{F}_0|_{\mathcal{M}^3 - \{p\}}\right)$ se extiende a una foliación singular $\mathcal{F}_N$ sobre $\mathcal{M}_N^3$ con conjunto singular de codimensión 3.

Por lo tanto, si $q \in Sing(\mathcal{F}_N)$ entonces $m_q(\mathcal{F}_N) = 1$. Por la forma canónica de Jordan, q no es una singularidad reducida si la parte lineal del campo vectorial holomorfo que genera $\mathcal{F}_N$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El Teorema A es una consecuencia del siguiente:

LEMA 1. *Sea Z un campo vectorial holomorfo con singularidad aislada en $0 \in \mathbb{C}^3$, tal que $m_0(Z) = 1$. Si $DZ(0)$ es de la forma*

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces 0 no es una S.A.A.

Prueba del Lema 1.

a) En este caso, el campo vectorial es de la forma

$$\begin{aligned} Z(x,y,z) &= \left(y + \sum_{k\geq 2} A_k(x,y,z)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\sum_{k\geq 2} B_k(x,y,z)\right)\frac{\partial}{\partial y} \\ &\quad + \left(\sum_{k\geq 2} C_k(x,y,z)\right)\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

En la carta del blowing-up $t = \dfrac{y}{x}, s = \dfrac{z}{x}$, un simple cálculo muestra que el transformado estricto $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ es generado por:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(x,t,s) &= x\left(t + A^*(x,t,s)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(-t^2 + xB^*(x,t,s)\right)\frac{\partial}{\partial t} \\ &\quad + \left(-ts + C^*(x,t,s)\right)\frac{\partial}{\partial s} \end{aligned}$$

Por lo tanto, es fácil ver que cualquier punto de la forma $(0,0,s)$, con $s \in \mathbb{C}$ es un punto singular de $\tilde{\mathcal{F}}_Z$. Se sigue que $Sing\left(\tilde{\mathcal{F}}_Z\right)$ tiene infinitos elementos y, por lo tanto, 0 no es una S.A.A. de $\mathcal{F}_Z$.

b) En este caso, tenemos que

$$Z(x,y,z) = \left(y + \sum_{k\geq 2} A_k(x,y,z)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(z + \sum_{k\geq 2} B_k(x,y,z)\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\sum_{k\geq 2} C_k(x,y,z)\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

Es fácil ver que el (0,0,0) en la carta $t = \dfrac{y}{x}, s = \dfrac{z}{x}$ es la única singularidad de $\tilde{\mathcal{F}}_Z$, más aún, un simple cálculo nos muestra que $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ es generado por

$$\tilde{Z} = \tilde{A}\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{B}\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{C}\frac{\partial}{\partial s},$$

donde

$$\left|\begin{array}{lcl} \tilde{A}(x,t,s) & = & xt + \sum_{k\geq 2} A_k(1,t,s)x^k \\ \tilde{B}(x,t,s) & = & s - t^2 + \sum_{k\geq 2} \left[B_k(1,t,s) - tA_k(1,t,s)\right] x^{k-1} \\ \tilde{C}(x,t,s) & = & -ts + \sum_{k\geq 2} \left[C_k(1,t,s) - sA_k(1,t,s)\right] x^{k-1} \end{array}\right.$$

No es difícil ver que

$$D\tilde{Z}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\alpha = B_2(1,0,0)$ y $\beta = C_2(1,0,0)$. Se sigue que (0,0,0) es también un punto singular no reducido de $\tilde{\mathcal{F}}_Z$. Distinguimos dos casos:

<u>CASO 1:</u> $\beta = 0$. En la carta $t' = \dfrac{t}{x}, s' = \dfrac{s}{x}$, el transformado estricto de $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ es generado por:

$$Z^{(2)}(x,t',s') = (\alpha + s')\frac{\partial}{\partial t'} + \tilde{Y}(x,t',s')$$

donde $\tilde{Y}$ es un campo vectorial holomorfo. Por lo tanto, cualquier punto de la forma $(0,t',-\alpha)$ con $t' \in \mathbb{C}$ es un punto no singular de

$\tilde{\mathcal{F}}_Z^{(2)}$, se sigue que $Sing\left(\tilde{\mathcal{F}}_Z^{(2)}\right)$ es un conjunto infinito y, por lo tanto, (0,0,0) no es una S.A.A. de $\mathcal{F}_Z$.

CASO 2: $\beta \neq 0$. Afirmo que existe un cambio de coordenadas lineal L tal que $L^*\tilde{Z}$ satisface las condiciones del caso 1. En efecto, definimos las transformaciones lineales $L, T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ como $L(z_1, z_2, z_3) = \left(\frac{1}{\beta}z_3, z_1, z_2 - \frac{\alpha}{\beta}z_3\right)$ y $T(w_1, w_2, w_3) = (w_2, \alpha w_1 + w_3, \beta w_1)$. Es claro que $T = L^{-1}$. Defino

$$X = L^*\tilde{Z} = T\tilde{Z} \circ L = A^*\frac{\partial}{\partial x_1} + B^*\frac{\partial}{\partial x_2} + C^*\frac{\partial}{\partial x_3},$$

donde $A^* = \tilde{B} \circ L$, $B^* = \alpha\tilde{A} \circ L + \tilde{C} \circ L$ y $C^* = \beta\tilde{A} \circ L$. Observe que:

$$DX(0) = T \cdot D\tilde{Z}(0) \cdot L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $C_2^*(1,0,0) = 0$. Por lo tanto, 0 no es una S.A.A. de X y de este modo, el Lema está probado. $\square$