

## 2. CARACTERIZACIÓN DE LAS FOLIACIONES EN $\mathcal{D}^n$ Y $\mathcal{D}_0^n$

Sea  $\mathcal{M}^n$  una variedad analítica compleja de dimensión  $n$  y consideremos en ella una foliación analítica singular por curvas  $\mathcal{F}_Z$ . Suponga que  $p \in \mathcal{M}^n$  es una singularidad aislada de  $\mathcal{F}_Z$ . Sea  $z = (z_1, \dots, z_n)$  un sistema de coordenadas de una vecindad de  $p$  en  $\mathcal{M}^n$  tal que  $p = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$ . En estas coordenadas,  $\mathcal{F}_Z$  es generado por el campo vectorial holomorfo  $Z = \sum_{i=1}^n Z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ . Si  $m_0(Z) = \nu$ , (donde  $\nu \in \mathbb{Z}^+$ ), entonces las componentes  $Z_i$  de  $Z$  tienen desarrollo de Taylor en  $0 \in \mathbb{C}^n$ :

$$(2.1) \quad Z_i = \sum_{k \geq \nu} Z_k^i, \quad 1 \leq i \leq n$$

donde cada  $Z_k^i$  son polinomios homogéneos de grado  $k$ .

En esta sección, probamos que la condición de que  $\mathcal{F}_Z$  tiene una singularidad dicrítica en  $p$ , puede ser caracterizada en términos de los polinomios  $Z_\nu^i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), es decir, de  $J_0^\nu$ , el jet de orden  $\nu$  de  $Z$  en el origen. Más específicamente, tenemos el siguiente resultado:

**PROPOSICIÓN 1.** *Usando las notaciones anteriores, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1)  $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}^n$ .
- (2)  $z_j Z_\nu^i - z_i Z_\nu^j = 0, \quad \forall 1 \leq i < j \leq n$ .
- (3)  $\exists P_{\nu-1}$  polinomio homogéneo de grado  $\nu - 1$  tal que

$$Z_\nu^i = z_i P_{\nu-1}, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

- (4)  $J_0^\nu(Z) = P_{\nu-1} R$ , donde  $R = \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$  es el campo vectorial radial.

**Demostración.** 1.)  $\Rightarrow$  2.) Para cada  $j = 1, \dots, n$  denotemos

$$U_j = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_j \neq 0\} \text{ y } \tilde{U}_j = E^{-1}[U_j],$$

donde  $E$  es el blowing-up centrado en  $0 \in \mathbb{C}^n$ . En  $\tilde{U}_j$  introducimos las coordenadas  $(y_1, \dots, y_n)$ , en la cual  $E$  se expresa como:

$$(2.2) \quad E(y_1, \dots, y_n) = (z_1, \dots, z_n),$$

donde  $z_i = y_i y_j$  si  $i \neq j$  y  $z_j = y_j$ . Denotemos

$$(2.3) \quad E^{-1}(0) \cap \tilde{U}_j = \{(y_1, \dots, y_n) \in \tilde{U}_j : y_j = 0\}$$

En esta carta, el pull-back de  $Z$  por  $E$  es generado por:

$$(2.4) \quad E^*Z = A_j \circ E \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i \neq j}^n \left( \frac{Z_i \circ E - y_i Z_j \circ E}{y_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

De (2.1):

$$Z_i \circ E(y) = \sum_{k \geq \nu} y_j^k Z_k^i(\hat{y}),$$

donde  $y = (y_1, \dots, y_n)$  y  $\hat{y} = (y_1, \dots, y_{j-1}, 1, y_{j+1}, \dots, y_n)$ .

Por (2.4):

$$(2.5) \quad E^*Z(y) = \left( \sum_{k \geq \nu} y_j^k Z_k^j(\hat{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i \neq j}^n \left( \sum_{k \geq \nu} y_j^{k-1} [Z_k^i(\hat{y}) - y_i Z_k^j(\hat{y})] \right) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

Procediendo por contradicción, supongamos que 2.) es falso (Hipótesis Auxiliar), entonces existe  $i \neq j$ ,  $1 \leq i \leq n$  tal que  $Z_\nu^i(\hat{y}) - y_i Z_\nu^j(\hat{y}) \neq 0$ , entonces  $E^*Z$  es divisible por  $y_j^{\nu-1}$ . Sea  $\tilde{Z} = \frac{E^*Z}{y_j^{\nu-1}}$ , claramente  $\tilde{\mathcal{F}}_Z$  es la foliación generada por  $\tilde{Z}$  en una

vecindad de  $E^{-1}(0) \cap \tilde{U}_j$ . De (2.5) tenemos que:

$$(2.6) \quad \tilde{Z}(y) = y_j Z_\nu^j(\hat{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i \neq j}^n (Z_\nu^i(\hat{y}) - y_i Z_\nu^j(\hat{y})) \frac{\partial}{\partial y_i} + y_j \tilde{Y}(y)$$

donde  $\tilde{Y}$  es un campo vectorial holomorfo. De (2.6) deducimos que  $E^{-1}(0)$  es invariante por  $\tilde{F}_Z$ , lo cual es una contradicción, puesto que  $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}^n$ .

2.)  $\Rightarrow$  3.) Consideremos  $Z_\nu^i(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k=0}^{\nu} a_{\nu-k}^i(z_2, \dots, z_n) z_1^k$ ,

donde los  $a_{\nu-k}^i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) son polinomios homogéneos de grado  $\nu - k$  en las variables  $z_2, \dots, z_n$ . De la hipótesis, tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= z_j Z_\nu^1 - z_1 Z_\nu^j = \sum_{k=0}^{\nu} a_{\nu-k}^1 z_j z_1^k - \sum_{k=0}^{\nu} a_{\nu-k}^j z_j^{k+1} \\ &= a_\nu^1 z_j + \sum_{k=1}^{\nu} \left( a_{\nu-k}^1 z_j - a_{\nu-k+1}^j \right) z_1^k - a_0^j z_1^{\nu+1} \end{aligned}$$

donde  $1 < j \leq n$ . Por lo tanto:

$$\begin{cases} a_\nu^1 = 0 \\ a_{\nu-k}^j = z_j a_{\nu-k-1}^1, & 0 \leq k \leq \nu - 1 \\ a_0^j = 0 \end{cases}$$

luego

$$Z_\nu^1 = \sum_{k=1}^{\nu} a_{\nu-k}^1 z_1^k = z_1 \left( \sum_{k=0}^{\nu-1} a_{\nu-k-1}^1 z_1^k \right)$$

$$Z_\nu^j = \sum_{k=0}^{\nu-1} a_{\nu-k}^j z_1^k = \sum_{k=0}^{\nu-1} a_{\nu-k-1}^1 z_j z_1^k = z_j \left( \sum_{k=0}^{\nu-1} a_{\nu-k-1}^1 z_1^k \right), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Por lo tanto  $P_{\nu-1} = \sum_{k=0}^{\nu-1} a_{\nu-k-1}^1(z_2, \dots, z_n) z_1^k$  es el polinomio homogéneo de grado  $\nu - 1$  buscado.

3.)  $\Rightarrow$  4.)

$$J_0^\nu(Z) = \sum_{i=1}^n Z_\nu^i \frac{\partial}{\partial z_i} = \sum_{i=1}^n z_i P_{\nu-1} \frac{\partial}{\partial z_i} = P_{\nu-1} \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

4.)  $\Rightarrow$  1.) Por hipótesis y (2.5), tenemos:

$$E^*Z(y) = y_j^\nu \left( P_{\nu-1}(\hat{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} \sum_{i=1, i \neq j}^n \left( Z_{\nu+1}^i(\hat{y}) - y_i Z_{\nu+1}^j(\hat{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_i} \right) + y_j^{\nu+1} \tilde{Y}(y).$$

Luego  $E^*Z$  es divisible por  $y_j^\nu$  y  $\tilde{\mathcal{F}}_Z$  es la foliación generada por  $\tilde{Z} = \frac{E^*Z}{y_j^\nu}$ , donde:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \tilde{Z}(y) &= P_{\nu-1}(\hat{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} + \\ &+ \sum_{i=1, i \neq j}^n \left( Z_{\nu+1}^i(\hat{y}) - y_i Z_{\nu+1}^j(\hat{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_i} + y_j \tilde{Y}(y) \end{aligned}$$

en donde  $\tilde{Y}$  es un campo vectorial holomorfo. De (2.3) deducimos que:

$$(2.8) \quad \tilde{Z}|_{E^{-1}(0) \cap \tilde{U}_j} = P_{\nu-1}(\hat{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1, i \neq j}^n \left( Z_{\nu+1}^i(\hat{y}) - y_i Z_{\nu+1}^j(\hat{y}) \right) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

Esto implica que  $E^{-1}(0)$  no es invariante por la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}_Z$  y luego  $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}^n$ .  $\square$

Consideremos una foliación  $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}^n$ . De (2.8) observamos que los puntos de  $Sing(\tilde{\mathcal{F}}_Z) \cap E^{-1}(0)$  en la carta  $\tilde{U}_j$ , ( $j$  fijo,  $1 \leq j \leq n$ ) son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} P_{\nu-1}(\hat{y}) = 0 \\ Z_{\nu+1}^i(\hat{y}) - y_i Z_{\nu+1}^j(\hat{y}) = 0, \quad 1 \leq i \leq n, i \neq j \end{cases}$$

Concluimos que  $Sing(\tilde{\mathcal{F}}_Z) \cap E^{-1}(0)$  es el conjunto de los puntos  $[z_1; \dots; z_n] \in \mathbb{C}P(n-1)$  los cuales son soluciones del siguiente  $\frac{(n-1)n}{2} + 1$  sistema de ecuaciones homogéneas:

$$(2.9) \quad \begin{cases} P_{\nu-1}(z) = 0 \\ z_j Z_{\nu+1}^i(z) - z_i Z_{\nu+1}^j(z) = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n \end{cases}$$

**COROLARIO.** Con las notaciones anteriores, tenemos que:

$\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}_0^n \iff z = 0 \in \mathbb{C}^n$  es la única solución del sistema (2.9).

Para cada  $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}_0^n$  definimos:

$$(2.10) \quad S = \{[z_1; \dots; z_n] \in \mathbb{C}P(n-1) : P_{\nu-1}(z_1, \dots, z_n) = 0\}$$

Luego  $S$  es una hipersuperficie algebraica en  $\mathbb{C}P(n-1)$  la cual tiene la siguiente propiedad: Sea  $\tilde{p} \in E^{-1}(0)$  y  $\tilde{L}$  la hoja de  $\tilde{\mathcal{F}}_Z$  que pasa por  $\tilde{p}$ . Claramente  $\tilde{L}$  es no singular y si  $\tilde{p} \notin S$  entonces  $\tilde{L}$  es transversal al espacio proyectivo  $E^{-1}(0)$ . Llamaremos a  $S$  la *hipersuperficie de tangencia* de la foliación  $\mathcal{F}_Z$ .

En la sección 7, asociaremos a cada hoja de  $\tilde{\mathcal{F}}_Z$  que pasa por  $\tilde{p} \in S$  un “orden de tangencia” con el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P(n-1)$ .