

10. EL TEOREMA DE DISINGULARIZACIÓN PARA FOLIACIONES DE \mathcal{D}_0^3 CON MULTIPLICIDAD ALGEBRAICA DOS

Sea $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}_0^3$ tal que $m_0(\mathcal{F}_Z) = 2$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que \mathcal{F}_Z es generado por el campo vectorial $Z = A \frac{\partial}{\partial z_1} + B \frac{\partial}{\partial z_2} + C \frac{\partial}{\partial z_3}$, donde:

$$(10.1) \quad \begin{cases} A(z_1, z_2, z_3) = z_1 z_3 + \sum_{k \geq 3} A_k(z_1, z_2, z_3) \\ B(z_1, z_2, z_3) = z_2 z_3 + \sum_{k \geq 3} B_k(z_1, z_2, z_3) \\ C(z_1, z_2, z_3) = z_3^2 + \sum_{k \geq 3} C_k(z_1, z_2, z_3) \end{cases}$$

En este caso, la curva de tangencia S y la curva S^* están definidas por:

$$(10.2) \quad S = \{[z_1; z_2; z_3] \in \mathbb{CP}(2) : z_3 = 0\}$$

y

$$(10.3) \quad S^* = \{[z_1; z_2; z_3] \in \mathbb{CP}(2) : C_3(z_1, z_2, z_3) = 0\}$$

De la Proposición 6, tenemos que S y S^* no tienen componentes comunes, por lo tanto $S \cap S^*$ tiene a lo más 3 puntos y podemos suponer que ellos están en la carta $z_1 \neq 0$ de $\mathbb{CP}(2)$.

Con el objetivo de hacer más entendible la exposición, primeramente asumiremos que $S \cap S^*$ tiene 3 puntos, por lo tanto $C_3(z_1, z_2, z_3)$ tiene la siguiente expresión:

$$(10.4) \quad C_3(z_1, z_2, z_3) = k(z_2 - y_1 z_1)(z_2 - y_2 z_1)(z_2 - y_3 z_1) + z_3[\dots]$$

donde $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{C}$ y $y_1 \neq y_2 \neq y_3$.

En la carta \tilde{U}_1 de $\tilde{\mathbb{C}}^3$ donde $x = z_1$, $y = \frac{z_2}{z_1}$ y $z = \frac{z_3}{z_1}$, el transformado estricto $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ es generado por:

$$(10.5) \quad \tilde{Z} = \tilde{A} \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{B} \frac{\partial}{\partial y} + \tilde{C} \frac{\partial}{\partial z}$$

donde

$$(10.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}(x, y, z) = z + \sum_{k \geq 3} x^{k-2} A_k(1, y, z) \\ \tilde{B}(x, y, z) = \sum_{k \geq 3} x^{k-3} [B_k(1, y, z) - y A_k(1, y, z)] \\ \tilde{C}(x, y, z) = \sum_{k \geq 3} x^{k-3} [C_k(1, y, z) - z A_k(1, y, z)] \end{array} \right.$$

Para $\tilde{p}_0 = (0, y_0, 0) \in S$, consideramos \tilde{L}_0 la hoja de $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ que pasa por \tilde{p}_0 . Sabemos que \tilde{L}_0 es localmente parametrizada por $\tilde{\alpha}_{\tilde{p}_0}(T) = (\tilde{\alpha}_1(T), \tilde{\alpha}_2(T), \tilde{\alpha}_3(T))$, con $T \in \mathbb{D}_\epsilon(0)$, la cual satisface la siguiente condición:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'_{\tilde{p}_0}(T) &= \tilde{Z}(\tilde{\alpha}_{\tilde{p}_0}(T)) \\ \tilde{\alpha}_{\tilde{p}_0}(0) &= (0, y_0, 0) \end{aligned}$$

De (10.4) tenemos que $S \cap S^* = \{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3\}$, donde $\tilde{p}_j = (0, y_j, 0)$, $j = 1, 2, 3$. sabemos que:

$$\tilde{p}_0 \in S - S^* \implies i_{\tilde{p}_0} \left(E^{-1}(0), \tilde{L}_0 \right) = 2$$

y

$$\tilde{p}_0 \in S \cap S^* \implies i_{\tilde{p}_0} \left(E^{-1}(0), \tilde{L}_0 \right) > 2$$

Más aún, no es difícil ver que tenemos los dos tipos siguientes de parametrizaciones de \tilde{L}_0 (compare con (8.7)):

- (1) Si $y_0 \notin \{y_1, y_2, y_3\}$ entonces $\tilde{\alpha}_{\tilde{p}_0}(T) = (T^2 \tilde{\xi}_1(T), \tilde{\alpha}_2(T), T \tilde{\xi}_3(T))$, donde $\tilde{\xi}_1, \tilde{\alpha}_2$ y $\tilde{\xi}_3$ son funciones analíticas tales que $\tilde{\xi}_1(0) = \frac{C_3(1, y_0, 0)}{2}$, $\tilde{\xi}_3(0) = C_3(1, y_0, 0)$ y $\tilde{\alpha}_2(0) = y_0$.
- (2) Si $y_0 = y_j$ entonces $\tilde{\alpha}_{\tilde{p}_j}(T) = (T^3 \tilde{\xi}_1(T), \tilde{\alpha}_2(T), T^2 \tilde{\xi}_3(T))$, donde $\tilde{\xi}_1, \tilde{\alpha}_2$ y $\tilde{\xi}_3$ son funciones analíticas tales que $\tilde{\xi}_1(0) = \frac{1}{6} \frac{\partial C_3}{\partial y}(1, y_j, 0) \tilde{\alpha}'_2(0)$, $\tilde{\xi}_3(0) = \frac{1}{2} \frac{\partial C_3}{\partial y}(1, y_j, 0) \tilde{\alpha}'_2(0)$, $\tilde{\alpha}_2(0) = y_0$ y $\tilde{\alpha}'_2(0) \neq 0$.

El *blowing-up a lo largo del eje Y* consiste en reemplazar cada punto $(0, y, 0)$ del eje Y por una recta proyectiva $\mathbb{C}P(1)$. Más específicamente, sea \mathbb{C}^3 el espacio 3-dimensional con coordenadas z_1, z_2

y z_3 , y sea $V \subseteq \mathbb{C}^3$ el lugar geométrico $\{z_2 = z_3 = 0\}$. Consideremos $[l_2; l_3]$ las coordenadas homogéneas sobre $\mathbb{C}P(1)$, y sea $(\mathbb{C}^3)^{(0)} \subseteq \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}P(1)$ la variedad analítica definida por la relación:

$$(\mathbb{C}^3)^{(0)} = \{(z_1, z_2, z_3, [l_2; l_3]) : z_2 l_3 = z_3 l_2\}$$

La proyección $F_0 : (\mathbb{C}^3)^{(0)} \rightarrow \mathbb{C}^3$, definida por $F_0(z_1, z_2, z_3, [l_2; l_3]) = (z_1, z_2, z_3)$, es claramente un isomorfismo de V tal que la imagen inversa del punto $z \in V$ es un espacio proyectivo $\mathbb{C}P(1)$. La variedad $(\mathbb{C}^3)^{(0)}$ junto con el mapeo $F_0 : (\mathbb{C}^3)^{(0)} \rightarrow \mathbb{C}^3$, es llamado el *Blowing-up de \mathbb{C}^3 a lo largo de V* ; la imagen inversa $D^{(0)} = F_0^{-1}[V]$ es llamada el *divisor excepcional del blowing-up*. Introducimos coordenadas complejas en $(\mathbb{C}^3)^{(0)}$ como sigue: sea $U_j^{(0)}$ el subconjunto abierto de $(\mathbb{C}^3)^{(0)}$ definido por:

$$U_j^{(0)} = \{(z_1, z_2, z_3, [l_2; l_3]) : l_j \neq 0\} \quad (j = 2, 3)$$

y consideremos los homeomorfismos $\varphi_2^{(0)} : U_2^{(0)} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, $\varphi_3^{(0)} : U_3^{(0)} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ definidos por:

$$\varphi_2^{(0)}(z_1, z_2, z_3, [l_2; l_3]) = \left(z_1, z_2, \frac{z_3}{z_2} \right)$$

y

$$\varphi_3^{(0)}(z_1, z_2, z_3, [l_2; l_3]) = \left(z_1, \frac{z_2}{z_3}, z_3 \right)$$

Entonces $(U_j^{(0)}, \varphi_j^{(0)})$, $j = 2, 3$ son las cartas de $(\mathbb{C}^3)^{(0)}$. Observe que $\varphi_2^{(0)}$ y $\varphi_3^{(0)}$ están relacionadas por la ecuación $\varphi_3^{(0)} \left(\varphi_2^{(0)} \right)^{-1} (y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_3^{-1}, y_2 y_3)$. Para más información sobre los Blowing-up a lo largo de una subvariedad, el lector puede consultar [8] y [16].

En el caso particular que V es el eje Y , introducimos coordenadas complejas (x, y, t) y (u, y, z) con $ut = 1$, luego la proyección F_0 es dada por $F_0(x, y, t) = (x, y, tx)$ y $F_0(u, y, z) = (uz, y, z)$.

Levantemos ahora la foliación $\tilde{\mathcal{F}}_Z$ a $(\mathbb{C}^3)^{(0)}$ y obtenemos la foliación $\tilde{\mathcal{F}}_Z^{(1)}$, la cual es generada por el campo vectorial holomorfo $\tilde{Z}^{(1)}$. Es

fácil ver que en las cartas (x, y, t) y (u, y, z) , el campo $\tilde{Z}^{(1)}$ tiene la siguiente expresión:

$$(10.7) \quad \tilde{Z}^{(1)} = \tilde{A}^{(1)} \frac{\partial}{\partial u} + \tilde{B}^{(1)} \frac{\partial}{\partial y} + \tilde{C}^{(1)} \frac{\partial}{\partial z}$$

donde:

$$(10.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}^{(1)}(u, y, z) = z - \sum_{k \geq 3} u^{k-2} z^{k-3} [C_k(1, y, z) - 2zA_k(1, y, z)] \\ \tilde{B}^{(1)}(u, y, z) = \sum_{k \geq 3} u^{k-3} z^{k-2} [B_k(1, y, z) - yA_k(1, y, z)] \\ \tilde{C}^{(1)}(u, y, z) = \sum_{k \geq 3} u^{k-3} z^{k-2} [C_k(1, y, z) - zA_k(1, y, z)] \end{array} \right.$$

y

$$(10.9) \quad \tilde{Z}^{(1)} = \tilde{A}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{B}^{(1)} \frac{\partial}{\partial y} + \tilde{C}^{(1)} \frac{\partial}{\partial t}$$

donde:

$$(10.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}^{(1)}(x, y, t) = xt^2 + \sum_{k \geq 3} x^{k-1} z^{k-3} A_k(1, y, xt) \\ \tilde{B}^{(1)}(x, y, t) = \sum_{k \geq 3} x^{k-2} [B_k(1, y, xt) - yA_k(1, y, xt)] \\ \tilde{C}^{(1)}(x, y, t) = -xt^2 + \\ \quad + \sum_{k \geq 3} x^{k-3} [C_k(1, y, xt) - 2xtA_k(1, y, xt)] \end{array} \right.$$

Por lo tanto $\tilde{Z}^{(1)}(u, y, 0) = -uC_3(1, y, 0) \frac{\partial}{\partial u}$ y $\tilde{Z}^{(1)}(0, y, t) = C_3(1, y, 0) \frac{\partial}{\partial t}$. Concluimos que el conjunto singular $C^{(0)}$ de la foliación $\tilde{\mathcal{F}}_Z^{(1)}$, generado por el campo vectorial holomorfo $\tilde{Z}^{(1)}$, está contenido en el divisor $D^{(0)}$ y tiene cuatro componentes irreducibles $C_0^{(0)}, \dots, C_3^{(0)}$ las cuales están definidas por:

$$C_0^{(0)} = \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{C}\}$$

y

$$C_j^{(0)} = \{(l, y_j, 0) : l \in \mathbb{CP}(1)\},$$

donde y_j es una raíz del polinomio $C_3(1, y, 0)$, ($1 \leq j \leq 3$).

Más aún, $D^{(0)}$ es invariante por $\tilde{\mathcal{F}}_Z^{(1)}$ y si

$$\tilde{L} \in \tilde{\mathcal{F}}_Z^{(1)} \Big|_{D^{(0)} - \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}}_Z^{(1)})}$$

entonces $\tilde{L} \simeq \mathbb{C}P(1)$.

Observe que la hoja $\tilde{L}_0 \in \tilde{\mathcal{F}}_Z$ que pasa por $\tilde{p}_0 = (0, y_0, 0) \in S$ puede ser levantada por F_0 a $\tilde{L}_0^{(1)} \in \tilde{\mathcal{F}}_Z^{(1)}$ la cual está en la carta (u, y, t) y su clausura $cl(\tilde{L}_0^{(1)})$ es parametrizada por $\tilde{\alpha}_{\tilde{p}_0}^{(1)}(T) = F_0^{-1}(\tilde{\alpha}_{\tilde{p}_0}(T))$. De las parametrizaciones (1.) y (2.), tenemos que:

$$(10.11) \quad y_0 \notin \{y_1, y_2, y_3\} \implies \tilde{\alpha}_{\tilde{p}_0}^{(1)}(T) = \left(T \frac{\tilde{\xi}_1(T)}{\tilde{\xi}_3(T)}, \tilde{\alpha}_2(T), T \tilde{\xi}_3(T) \right)$$

y

$$(10.12) \quad y_0 = y_j \quad (j = 1, 2, 3) \implies \tilde{\alpha}_{\tilde{p}_j}^{(1)}(T) = \left(T \frac{\tilde{\xi}_1(T)}{\tilde{\xi}_3(T)}, \tilde{\alpha}_2(T), T^2 \tilde{\xi}_3(T) \right)$$

Por lo tanto, existen tres hojas $\tilde{L}_1^{(1)}, \tilde{L}_2^{(1)}, \tilde{L}_3^{(1)} \in \tilde{\mathcal{F}}_Z^{(1)}$ tales que $cl(\tilde{L}_j^{(1)})$ son tangentes al divisor $D^{(0)}$ y las demás son transversales a $D^{(0)}$.

Consideremos la carta (u, y, z) de $(\mathbb{C}^3)^{(0)}$ y hagamos un nuevo blowing-up $((\mathbb{C}^3)^{(1)}, F_1)$ a lo largo del eje Y . Introducimos coordenadas complejas (u, y, t_1) y (u_1, y, z) en $(\mathbb{C}^3)^{(1)}$ tales que la proyección sea expresada por $F_1(u, y, t_1) = (u, y, ut_1) = (u, y, z)$ y $F_1(u_1, y, z) = (u_1z, y, z) = (u, y, z)$. Denotaremos $D^{(1)} = F_1^{-1}[\text{eje } Y]$.

De (10.7) y (10.8), un fácil cálculo muestra que:

$$(10.13) \quad \begin{aligned} \tilde{Z}^{(2)}(u, y, t_1) &= F_1^* \left(\tilde{Z}^{(1)} \right) (u, y, t_1) \\ &= \tilde{A}^{(2)} \frac{\partial}{\partial u} + \tilde{B}^{(2)} \frac{\partial}{\partial y} + \tilde{C}^{(2)} \frac{\partial}{\partial t_1} \end{aligned}$$

donde:

$$\tilde{A}^{(2)}(u, y, t_1) = ut_1 - \sum_{k \geq 3} u^{2k-5} t_1^{k-3} [C_k(1, y, ut_1) - 2ut_1 A_k(1, y, ut_1)]$$

$$\tilde{B}^{(2)}(u, y, t_1) = \sum_{k \geq 3} u^{2k-5} t_1^{k-2} [B_k(1, y, ut_1) - y A_k(1, y, ut_1)]$$

$$C^{(2)}(u, y, t_1) = -t_1^2 + \sum_{k \geq 3} u^{2k-6} t_1^{k-2} [2C_k(1, y, ut_1) - 3ut_1 A_k(1, y, ut_1)]$$

y

$$(10.14) \quad \begin{aligned} \tilde{Z}^{(2)}(u_1, y, z) &= F_1^* \left(\tilde{Z}^{(1)} \right) (u_1, y, z) \\ &= \tilde{A}^{(2)} \frac{\partial}{\partial u_1} + \tilde{B}^{(2)} \frac{\partial}{\partial y} + \tilde{C}^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

donde:

$$\tilde{A}^{(2)}(u_1, y, z) = 1 - \sum_{k \geq 3} u_1^{k-2} z^{2k-6} [2C_k(1, y, z) - 3z A_k(1, y, z)]$$

$$\tilde{B}^{(2)}(u_1, y, z) = \sum_{k \geq 3} u_1^{k-3} z^{2k-5} [B_k(1, y, z) - y A_k(1, y, z)]$$

$$\tilde{C}^{(2)}(u_1, y, z) = \sum_{k \geq 3} u_1^{k-3} z^{2k-5} [C_k(1, y, z) - z A_k(1, y, z)]$$

Por lo tanto

$$\tilde{Z}^{(2)}(0, y, t_1) = -t_1 [t_1 - C_3(1, y, 0)] \frac{\partial}{\partial t_1}$$

y

$$\tilde{Z}^{(2)}(u_1, y, 0) = [1 - 2u_1 C_3(1, y, 0)] \frac{\partial}{\partial u_1}.$$

Concluimos que el conjunto singular de la foliación $\tilde{\mathcal{F}}_Z^{(2)}$ generada por el campo vectorial $\tilde{Z}^{(2)}$, está contenido en el divisor $D^{(0)} \cup D^{(1)}$ y $\tilde{\mathcal{F}}_Z^{(2)} \Big|_{D^{(1)}}$ tiene dos componentes irreducibles $C_0^{(1)}$ y $C_1^{(1)}$, tales que en la carta (u, y, t_1) son expresadas como:

$$C_0^{(1)} = \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{C}\}$$

$$C_1^{(1)} = \{(0, y, 2C_3(1, y, 0)) : y \in \mathbb{C}\}.$$

Más aún, $D^{(0)} \cup D^{(1)}$ es invariante por la foliación $\tilde{\mathcal{F}}_Z^{(2)}$ y si $\tilde{L} \in \tilde{\mathcal{F}}_Z^{(2)} \Big|_{D^{(0)} \cup D^{(1)} - \text{sing}(\tilde{\mathcal{F}}_Z^{(1)})}$ entonces $\tilde{L} \simeq \mathbb{C}P(1)$.

Note que las hojas $\tilde{L}_0^{(1)} \in \tilde{\mathcal{F}}_Z^{(1)}$ pueden ser levantadas por F_1 a $\tilde{L}_0^{(2)} \in \tilde{\mathcal{F}}_Z^{(2)}$, las cuales están en la carta (u, y, t_1) , y tales que $cl(\tilde{L}_0^{(2)})$ es parametrizada por $\tilde{\alpha}_{\tilde{p}_0}^{(2)}(T) = F_1^{-1}(\tilde{\alpha}_{\tilde{p}_0}^{(1)}(T))$. De (10.11) y (10.12) tenemos que:

$$(10.15) \quad y_0 \notin \{y_1, y_2, y_3\} \Rightarrow \tilde{\alpha}_{\tilde{p}_0}^{(2)}(T) = \left(T \frac{\tilde{\xi}_1(T)}{\tilde{\xi}_3(T)}, \tilde{\alpha}_2(T), \frac{\tilde{\xi}_3(T)^2}{\tilde{\xi}_1(T)} \right)$$

y

$$(10.16) \quad y_0 = y_j \Rightarrow \tilde{\alpha}_{\tilde{p}_j}^{(2)}(T) = \left(T \frac{\tilde{\xi}_1(T)}{\tilde{\xi}_3(T)}, \tilde{\alpha}_2(T), T \frac{\tilde{\xi}_3(T)^2}{\tilde{\xi}_1(T)} \right)$$

($j = 1, 2, 3$).

y de (10.15), (10.16), (1.) y (2.), tenemos:

$$\tilde{\alpha}_{\tilde{p}_0}^{(2)}(T) = \begin{cases} (0, y_0, 2C_3(1, y_0, 0)), & \text{si } \tilde{p}_0 \in S - S^* \\ (0, y_j, 0), & \text{si } \tilde{p}_0 = \tilde{p}_j \in S \cap S^* \end{cases}$$

Se sigue que:

- $cl(\tilde{L}_0^{(2)})$ es transversal en \tilde{p}_0 a $D^{(0)} \cup D^{(1)}$; $\forall \tilde{p}_0 \in S$.
- $cl(\tilde{L}_0^{(2)}) \cap (D^{(0)} \cup D^{(1)}) = \{(0, y_0, 2C_3(1, y_0, 0))\} \notin D^{(1)} - D^{(0)}$.
- $cl(\tilde{L}_j^{(2)}) \cap (D^{(0)} \cup D^{(1)}) = \{(0, y_j, 0)\} \in D^{(0)} \cap D^{(1)}$, $1 \leq j \leq 3$.

Por lo tanto, existen tres hojas $\tilde{L}_1^{(2)}$, $\tilde{L}_2^{(2)}$ y $\tilde{L}_3^{(2)}$ tales que su clausura pasan por una esquina. Con el propósito de obtener todas las separatrices transversales al divisor y ninguna separatriz pasando por una esquina, hacemos un nuevo blowing-up $((\mathbb{C}^3)^{(2)}, F_2)$ a lo largo del eje Y en la carta (u, y, t_1) . Denotaremos por (u, y, t_2) y (u_2, y, t_1) a las coordenadas de este nuevo blowing-up. Luego $F_2(u, y, t_2) =$

$(u, y, ut_2) = (u, y, t_1)$ y $F_2(u_2, y, t_1) = (u_2 t_1, y, t_1) = (u_1, y, t_1)$. Denotaremos $D^{(2)} = F_2^{-1}$ [eje Y].

De (10.13), obtenemos:

$$(10.17) \quad \begin{aligned} \tilde{Z}^{(3)}(u, y, t_2) &= F_2^*(\tilde{Z}^{(2)})(u, y, t_2) \\ &= \tilde{A}^{(3)} \frac{\partial}{\partial u} + \tilde{B}^{(3)} \frac{\partial}{\partial y} + \tilde{C}^{(3)} \frac{\partial}{\partial t_2} \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(3)}(u, y, t_2) &= u^2 t_2 - \\ &\quad - \sum_{k \geq 3} u^{3k-8} t_2^{k-3} [C_k(1, y, u^2 t_2) - 2u^2 t_2 A_k(1, y, u^2 t_2)] \end{aligned}$$

$$\tilde{B}^{(3)}(u, y, t_2) = \sum_{k \geq 3} u^{3k-7} t_2^{k-2} [B_k(1, y, u^2 t_2) - y A_k(1, y, u^2 t_2)]$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{(3)}(u, y, t_2) &= v - 2ut_2^2 + \\ &\quad + \sum_{k \geq 3} u^{3k-9} t_2^{k-2} [3C_k(1, y, u^2 t_2) - 5u^2 t_2 A_k(1, y, u^2 t_2)] \end{aligned}$$

y

$$(10.18) \quad \begin{aligned} \tilde{Z}^{(3)}(u_2, y, t_1) &= F_2^*(\tilde{Z}^{(2)})(u_2, y, t_1) \\ &= \tilde{A}^{(3)} \frac{\partial}{\partial u_2} + \tilde{B}^{(3)} \frac{\partial}{\partial y} + \tilde{C}^{(3)} \frac{\partial}{\partial t_1} \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(3)}(u_2, y, t_1) &= 2u_2 t_1 - \\ &\quad - \sum_{k \geq 3} u_2^{2k-5} t_1^{3k-9} [3C_k(1, y, u_2 t_1^2) - 5u_2 t_1^2 A_k(1, y, u_2 t_1^2)] \end{aligned}$$

$$\tilde{B}^{(3)}(u_2, y, t_1) = \sum_{k \geq 3} u_2^{2k-5} t_1^{3k-7} [B_k(1, y, u_2 t_1^2) - y A_k(1, y, u_2 t_1^2)]$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{(3)}(u_2, y, t_1) = & -t_1^2 + \\ & + \sum_{k \geq 3} u_2^{2k-6} t_1^{3k-8} [2C_k(1, y, u_2 t_1^2) - 3u_2 t_1^2 A_k(1, y, u_2 t_1^2)] \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\tilde{Z}^{(3)}(0, y, t_2) = 3t_2 C_3(1, y, 0) \frac{\partial}{\partial t_2}$$

y

$$\tilde{Z}^{(3)}(u_2, y, 0) = -3u_2 C_3(1, y, 0) \frac{\partial}{\partial u_2}.$$

Concluimos que el conjunto singular de la foliación $\tilde{\mathcal{F}}_Z^{(3)}$ generado por el campo vectorial $\tilde{Z}^{(3)}$, está contenido en el divisor $D^{(0)} \cup D^{(1)} \cup D^{(2)}$ y $\tilde{\mathcal{F}}_Z^{(3)} \Big|_{D^{(2)}}$ tiene cinco componentes irreducibles $C_0^{(3)}, \dots, C_4^{(3)}$, donde:

$$C_0^{(3)} = \text{eje } Y \text{ en la carta } (u_2, y, t_1)$$

$$C_j^{(3)} = \{(0, y_j, l) : l \in \mathbb{C}P(1)\}$$

$$C_4^{(3)} = \text{eje } Y \text{ en la carta } (u, y, t_2)$$

Más aún, $D^{(0)} \cup D^{(1)} \cup D^{(2)}$ es invariante por la foliación $\tilde{\mathcal{F}}_Z^{(3)}$ y si $\tilde{L} \in \tilde{\mathcal{F}}_Z^{(3)} \Big|_{D-\text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}}_Z^{(3)})}$ con $D = D^{(0)} \cup D^{(1)} \cup D^{(2)}$, por lo tanto $\tilde{L} \simeq \mathbb{C}P(1)$.

Observe que las hojas $\tilde{L}_j^{(2)} \in \tilde{\mathcal{F}}_Z^{(2)}$ pueden ser levantadas por F_2 a $\tilde{L}_j^{(3)} \in \tilde{\mathcal{F}}_Z^{(3)}$, y de (10.16), $cl(\tilde{L}_j^{(2)})$ en la carta (u, y, t_2) , es parametrizado por:

$$\tilde{\alpha}_{\tilde{p}_j}^{(3)}(T) = F_2^{-1}(\tilde{\alpha}_{\tilde{p}_0}^{(2)}(T)) = \left(T \frac{\tilde{\xi}_1(T)}{\tilde{\xi}_3(T)}, \tilde{\alpha}_2(T), \frac{\tilde{\xi}_3(T)^3}{\tilde{\xi}_1(T)^2} \right)$$

y de (2.) tenemos que:

$$\tilde{\alpha}_{\tilde{p}_j}^{(3)}(T) = (0, y_j, \frac{9}{2} \frac{\partial C_3}{\partial y}(1, y_j, 0) \tilde{\alpha}'_2(0))$$

Por lo tanto, $cl(\tilde{L}_j^{(3)})$ es transversal a la componente $D^{(2)}$ del divisor y no pasa por una esquina.

Finalmente, cuando $S \cap S^* = \{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2\}$ (resp. $S \cap S^* = \{\tilde{p}_1\}$) es fácil ver que los métodos empleados anteriormente, pueden ser aplicados a este caso, haciendo un blowing-up adicional a lo largo del eje Y (resp. haciendo dos blowing-up adicionales a lo largo del eje Y) con la finalidad de obtener todas las separatrices transversales al divisor $D^{(0)} \cup \dots \cup D^{(3)}$ (resp. $D^{(0)} \cup \dots \cup D^{(4)}$) y tal que ninguna separatriz pase por una esquina. De esta manera, hemos demostrado el siguiente:

TEOREMA D. *Sea $\mathcal{F}_Z \in \mathcal{D}_0^3$ tal que $m_0(\mathcal{F}_Z) = 2$. Entonces existe una desingularización para \mathcal{F}_Z .*